Prof. Dr. W. Balser
Robin Nittka
Sommersemester 2010

Lösungen Differentialgleichungen II: Blatt 1

Bitte im SLC für die Vorlesung anmelden!

1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\mathbb{X}$ ein Banachraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Die Funktionen $f, g \colon I \to \mathbb{X}$ und $\alpha \colon I \to \mathbb{C}$ seien differenzierbar. Zeige, dass folgende Funktionen ebenfalls differenzierbar sind und bestimme die Ableitung:

(a) $f + g$; (1)

Lösung: Wegen Stetigkeit der Addition gilt

$$\begin{aligned}\frac{f(t)+g(t)-f(t_0)-g(t_0)}{t-t_0} &= \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} + \frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0} \\ &\to f'(t_0)+g'(t_0).\end{aligned}$$

Also ist $f+g$ differenzierbar mit Ableitung $f'+g'$.

(b) αf; (1)

Lösung: Wegen Stetigkeit der Skalarmultiplikation gilt

$$\begin{aligned}\frac{\alpha(t)f(t)-\alpha(t_0)f(t_0)}{t-t_0} &= \alpha(t)\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} + \frac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{t-t_0}f(t_0) \\ &\to \alpha(t_0)f'(t_0)+\alpha'(t_0)f(t_0).\end{aligned}$$

Also ist αf differenzierbar mit Ableitung $\alpha' f + \alpha f'$.

(c) $\langle f, g\rangle_{\mathbb{X}}$ (unter der Annahme, dass $\mathbb{X}$ ein Hilbertraum ist); (1)

Lösung: Wegen Stetigkeit des Skalarprodukts ist

$$\begin{aligned}\frac{\langle f(t), g(t)\rangle - \langle f(t_0), g(t_0)\rangle}{t-t_0} &= \left\langle \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}, g(t)\right\rangle + \left\langle f(t_0), \frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}\right\rangle \\ &\to \left\langle f'(t_0), g(t_0)\right\rangle + \left\langle f(t_0), g'(t_0)\right\rangle.\end{aligned}$$

Also ist $\langle f, g\rangle$ differenzierbar mit Ableitung $\langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle$.

2. Sei $\mathbb{X}$ ein (reeller oder komplexer) Banachraum und $A \in \mathscr{L}(\mathbb{X})$. Zeige:

(a) Für jedes $T > 0$ konvergiert die Reihe $\mathrm{e}^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ gleichmäßig in $t \in [-T, T]$. (2)

Lösung: Sei $p \le q$ und $t \in [-T, T]$. Dann ist nach der Dreiecksungleichung und wegen $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$ für alle $A, B \in \mathscr{L}(\mathbb{X})$ also

$$\Big\|\sum_{n=p}^{q} \frac{(tA)^n}{n!}\Big\| \le \sum_{n=p}^{q} \frac{T^n\|A\|^n}{n!}.$$

Weil die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n\|A\|^n}{n!} = \mathrm{e}^{T\|A\|}$$

konvergiert, zeigt dies nach dem Cauchy-Kriterium die Konvergenz von e^{tA} für jedes $t \in \mathbb{R}$; beachte hierfür, dass $\mathscr{L}(\mathbb{X})$ vollständig ist. Zudem folgt aus der Stetigkeit der Norm

$$\Big\| \mathrm{e}^{tA} - \sum_{n=0}^{q} \frac{(tA)^n}{n!} \Big\| \leq \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{T^n \|A\|^n}{n!} \to 0 \quad (q \to \infty),$$

was zeigt, dass die Konvergenz gleichmäßig in $t \in [-T, T]$ ist.

(b) Für $t, s \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{e}^{(t+s)A} = \mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{sA}$. (2)

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{(t+s)A} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s+t)^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^k t^{n-k} \frac{A^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k A^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k} A^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k A^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \mathrm{e}^{sA}\,\mathrm{e}^{tA}, \end{aligned}$$

wobei die Vertauschung der Reihen wegen der gleichmäßigen Konvergenz gerechtfertigt ist (oder alternativ mit dem Satz von Fubini für das Zählmaß und unter Verwendung des Satzes von Hahn-Banach begründet werden kann).

(c) Die Funktion $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ ist stetig differenzierbar mit Ableitung (3)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}^{tA} = A\,\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA}\,A.$$

Lösung: Nach den Rechenregeln für die Ableitung ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(tA)^n = n t^{n-1} A^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und somit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{n=0}^{N} \frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{t^{n-1}A^n}{(n-1)!} = A \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(tA)^n}{n!} A.$$

Wegen Stetigkeit der Operatormultiplikation und nach dem bereits Gezeigten ist also

$$A\,\mathrm{e}^{tA} = \lim_{N\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{n=0}^{N} \frac{(tA)^n}{n!} = \mathrm{e}^{tA}\,A$$

gleichmäßig für $t \in [-T, T]$, $T > 0$.

Man kann wie in den Grundvorlesungen zeigen, dass die (lokal) gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge und ihrer Ableitungen ausreichen, um die Differenzierbarkeit der Grenzfunktion zu garantieren, wobei deren Ableitung dann der Grenzwert der Ableitungen ist. Hieraus folgt die Differenzierbarkeit von e^{tA} mit der behaupteten Ableitung.

3. *Bonusaufgabe:* Sei $\mathbb{A}$ eine Banachalgebra. Das bedeutet, $\mathbb{A}$ sei ein (reeller oder komplexer) Banachraum versehen mit einer assoziativen, bilinearen Operation $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, $(A, B) \mapsto AB := A \cdot B$ (die die Rolle einer Multiplikation spielt), für die $\|A \cdot B\| \leq \|A\|\,\|B\|$ für alle $A, B \in \mathbb{A}$ gilt. Zeige:

(a) Sei $\mathbb{X}$ ein Banachraum. Bezüglich der Operatornorm ist $\mathscr{L}(\mathbb{X})$ eine Banachalgebra. (1)

Lösung: In der Funktionalanalysis wird gezeigt, dass $\mathscr{L}(\mathbb{X})$ bezüglich der Operatornorm ein Banachraum ist. Assoziativität und Bilinearität der Multiplikation ist klar. Sind A und B in $\mathscr{L}(\mathbb{X})$, so ist nach Definition der Operatornorm

$$\|ABx\| \leq \|A\|\,\|Bx\| \leq \|A\|\,\|B\|\,\|x\|$$

für alle $x \in \mathbb{X}$, was $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ zeigt.

(b) Die Multiplikation $(A, B) \mapsto AB$ ist stetig. (1)

Lösung: Es gelte $A_n \to A$ und $B_n \to B$ in $\mathbb{A}$. Dann ist

$$\|A_nB_n - AB\| \leq \|A_n(B_n - B)\| + \|(A_n - A)B\| \leq \|A_n\|\,\|B_n - B\| + \|A_n - A\|\,\|B\| \to 0,$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass $\|A_n\|$ aufgrund der Stetigkeit der Norm beschränkt ist.

(c) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sind $A, B\colon I \to \mathbb{A}$ differenzierbare Funktionen, so ist AB ebenfalls differenzierbar und $(AB)' = A'B + AB'$. (1)

Lösung: Wegen Stetigkeit der Multiplikation ist

$$\begin{aligned}\frac{A(t)B(t) - A(t_0)B(t_0)}{t - t_0} &= \frac{A(t) - A(t_0)}{t - t_0}B(t) + A(t_0)\frac{B(t) - B(t_0)}{t - t_0} \\ &\to A'(t_0)B(t_0) + A(t_0)B'(t_0).\end{aligned}$$

Also ist AB differenzierbar mit Ableitung $A'B + AB'$.

(d) Es gebe ein multiplikativ neutrales Element $E \in \mathbb{A}$. Wir setzen $A^0 := E$ für alle $A \in \mathbb{A}$. Dann bildet die Menge $G := \{\mathrm{e}^{tA} : t \in \mathbb{R}\}$ eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation, wobei e^{tA} wie in Aufgabe 2 definiert sei. (1)

Hinweis: Man mache sich zuerst selbst klar, dass sich alle Aussagen in Aufgabe 2 auf diese Situation übertragen.

Lösung: In den Beweisen in Aufgabe 2 wurden für $\mathscr{L}(\mathbb{X})$ nur die Eigenschaften einer Banachalgebra benutzt. Die Beweise übertragen sich also wörtlich auf den allgemeinen Fall.

Dass das Produkt von Elementen aus G wieder in G liegt und die Elemente von G kommutieren, folgt aus $\mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{sA} = \mathrm{e}^{(s+t)A}$. Ein neutrales Element ist durch $\mathrm{e}^{0A} = E$ gegeben. Ein zu e^{tA} inverses Element in G ist e^{-tA}. Also ist G eine abelsche Gruppe.

(e) Seien $A, B \in \mathbb{A}$. Es ist genau dann $\mathrm{e}^{t(A+B)} = \mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{tB}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, wenn $A \cdot B = B \cdot A$ gilt. (2)

Lösung: Sei zuerst $AB = BA$ angenommen. Dann gilt natürlich auch $BA^k = A^kB$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir zeigen mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

gilt. Für $n = 0$ ist dies klar. Für den Induktionsschritt rechnet man mit der Formel für Binomialkoeffizienten

$$\begin{aligned}(A + B)^{n+1} &= (A + B)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} A^k B^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n+1-k} \\ &= A^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} A^k B^{n+1-k} + B^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} A^k B^{n+1-k}\end{aligned}$$

nach, was die Behauptung beweist. Für $t \in \mathbb{R}$ ist also

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{t(A+B)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n(A + B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k} B^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n B^n}{n!} = \mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{tB},\end{aligned}$$

wobei die Vertauschung der Reihen wegen gleichmäßiger Konvergenz gerechtfertigt ist.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass $\mathrm{e}^{t(A+B)} = \mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{tB}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ richtig ist. Differenzieren wir diese Identität unter Verwendung des vorigen Aufgabenteils and der Produktregel, erhalten wir

$$(A+B)\,\mathrm{e}^{t(A+B)} = \mathrm{e}^{tA}\,A\,\mathrm{e}^{tB} + \mathrm{e}^{tA}\,B\,\mathrm{e}^{tB} = \mathrm{e}^{tA}(A+B)\,\mathrm{e}^{tB},$$

nach Voraussetzung also

$$(A+B)\,\mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{tB} = \mathrm{e}^{tA}(A+B)\,\mathrm{e}^{tB}\,.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung von rechts mit $\mathrm{e}^{-tB} = (\mathrm{e}^{tB})^{-1}$ und ziehen danach $A\,\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA}\,A$ auf beiden Seiten ab, ergibt sich

$$B\,\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA}\,B$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Differenziert man diese Gleichung wiederum, erhält man

$$BA\,\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA}\,AB$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, was für $t = 0$ die Behauptung $AB = BA$ zeigt.

Alternative: Man kann im zweiten Teil auch mit (banachraumwertigen) analytischen Funktionen argumentieren. Führt man in der Gleichung

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{t(A+B)} &= \mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{tB} = (E + tA + \tfrac{t^2}{2}A^2 + O(t^3))(E + tB + \tfrac{t^2}{2}B^2 + O(t^3)) \\ &= E + t(A+B) + \tfrac{t^2}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + O(t^3)\end{aligned}$$

einen Koeffizientenvergleich mit der Potenzreihe von $\mathrm{e}^{t(A+B)}$ durch, so erhält man für den Koeffizienten von t^2

$$A^2 + AB + BA + B^2 = (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2,$$

was zu $BA = AB$ äquivalent ist.