Universität Ulm

Freitag, 14.05.2010

Prof. Dr. W. Balser
Robin Nittka
Sommersemester 2010

Differentialgleichungen II: Blatt 2

4. Sei $\mathbb{X}$ ein Banachraum und $f\colon [a,b] \to \mathbb{X}$ stetig. Laut Vorlesung existiert dann $F(t) := \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s$ für alle $t \in [a,b]$. Zeige, dass F eine Stammfunktion von f ist!

5. Sei

$$\mathbb{X} := \big\{u\colon [0,1] \to \mathbb{R} : \|u\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |u(x)| < \infty\big\},$$

der Vektorraum aller beschränkten reellwertigen Funktion auf $[0,1]$, versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, bezüglich der dieser Raum ein Banachraum ist. Definiere $f(t) := \mathbb{1}_{[0,t]}$ für $t \in I := [0,1]$. Zeige:

(a) $f\colon I \to \mathbb{X}$ ist integrierbar.

(b) f ist in jedem Punkt $t \in [0,1]$ unstetig.

6. Seien $\mathbb{X}$ und $\mathbb{Y}$ Banachräume, $T\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ linear und stetig, und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{X}$ integrierbar. Zeige, dass dann auch $T \circ f\colon [a,b] \to \mathbb{Y}$ integrierbar ist und

$$T\Big(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big) = \int_a^b T(f(t))\,\mathrm{d}t$$

gilt!

7. Sei $I = [t_0, T)$, $T > t_0$, und sei u eine stetige, reellwertige Funktion auf I. Zeige:

(a) Seien α und β stetige, reellwertige Funktionen auf I mit $\beta(t) \ge 0$ für alle $t \in I$. Ist $u(t) \le \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s)u(s)\,\mathrm{d}s$ für alle $t \in I$, so gilt

$$u(t) \le \alpha(t) + \int_{t_0}^t \alpha(s)\beta(s)\,\mathrm{e}^{\int_s^t \beta(r)\,\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}s$$

für alle $t \in I$.
Tipp: Beachte die Anleitung zu Aufgabe 1.2.1 im Skript.

(b) Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \ge 0$ mit $u(t) \le a + b\int_{t_0}^t u(s)\,\mathrm{d}s$ für alle $t \in I$ gegeben. Dann ist $u(t) \le a\,\mathrm{e}^{b(t-t_0)}$ für alle $t \in I$.

(c) Ist u stetig differenzierbar und gilt $u'(t) \le cu(t)$ für alle $t \in I$ mit einem $c \ge 0$, so ist $u(t) \le u(t_0)\,\mathrm{e}^{c(t-t_0)}$ für alle $t \in I$.

8. Seien $a < b$ reelle Zahlen und $\mathbb{X}$ ein Banachraum. Es bezeichne $\mathrm{C}^1([a,b];\mathbb{X})$ den Vektorraum der stetig differenzierbaren $\mathbb{X}$-wertigen Funktionen auf $[a,b]$. Zeige, dass

$$\|u\|_1 := \|u(a)\|_{\mathbb{X}} + \sup_{t\in[a,b]} \|u'(t)\|_{\mathbb{X}}$$

eine Norm auf $\mathrm{C}^1([a,b];\mathbb{X})$ definiert, bezüglich der dieser Raum vollständig ist!