Universität Ulm

Freitag, 14.05.2010

Prof. Dr. W. Balser
Robin Nittka
Sommersemester 2010

Lösungen Differentialgleichungen II: Blatt 2

4. Sei $\mathbb{X}$ ein Banachraum und $f\colon [a,b] \to \mathbb{X}$ stetig. Laut Vorlesung existiert dann $F(t) := \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s$ für alle $t \in [a,b]$. Zeige, dass F eine Stammfunktion von f ist!

Lösung: Sei $t_0 \in [a,b)$ und $t \in (t_0, b]$. Dann gilt nach Skript

$$\int_a^{t_0} f(s)\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^t f(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s$$

und somit

$$F(t) - F(t_0) = \int_{t_0}^t f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Also ist

$$\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} - f(t_0) = \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^t (f(s) - f(t_0))\,\mathrm{d}s$$

für $t > t_0$. Sei $\varepsilon > 0$. Weil f stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $\|f(s) - f(t_0)\| < \varepsilon$ für alle $s \in [t_0, t_0+\delta] \subset [a,b]$. Somit ist für $t \in (t_0, t_0+\delta]$ nach der Fundamentalungleichung

$$\Big\|\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} - f(t_0)\Big\| \le \varepsilon,$$

was

$$\limsup_{t\to t_0^+}\Big\|\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} - f(t_0)\Big\| \le \varepsilon$$

zeigt. Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt hieraus

$$\lim_{t\to t_0^+}\Big\|\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} - f(t_0)\Big\| = 0.$$

Völlig analog zeigt man, dass auch der entsprechende linksseitige Grenzwert für $t_0 \in (a,b]$ verschwindet. Nach Definition ist dann F in t_0 differenzierbar mit $F'(t_0) = f(t_0)$. Weil dies für jedes $t_0 \in [a,b]$ richtig ist, ist F auf $[a,b]$ differenzierbar mit $F' = f$.

5. Sei

$$\mathbb{X} := \big\{u\colon [0,1] \to \mathbb{R} : \|u\|_\infty := \sup\nolimits_{x\in[0,1]} |u(x)| < \infty\big\},$$

der Vektorraum aller beschränkten reellwertigen Funktion auf $[0,1]$, versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, bezüglich der dieser Raum ein Banachraum ist. Definiere $f(t) := \mathbb{1}_{[0,t]}$ für $t \in I := [0,1]$. Zeige:

(a) $f\colon I \to \mathbb{X}$ ist integrierbar.

Lösung: Wir verwenden das Cauchy-Kriterium für Integrierbarkeit, d.h. Aufgabe 1.1.6 im Skript. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben, und ohne Einschränkung sei $\varepsilon = \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen $\mathcal{Z}_\varepsilon$ als die äquidistante Zerlegung von $[0,1]$ mit Feinheit ε. Seien nun $\mathcal{Z}$ und $\tilde{\mathcal{Z}}$ Verfeinerungen von $\mathcal{Z}_\varepsilon$ und τ und $\tilde\tau$ zugehörige Zwischenpunktvektoren. Weil punktweise $f(s) \le f(t)$ für $s \le t$ gilt, ist $f(\frac{i-1}{n}) \le f(\tau_k) \le f(\frac{i}{n})$ für

$\tau_k \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$. Aus dieser Beobachtung folgt

$$\begin{aligned} S(\mathcal{Z},\tau) - S(\tilde{\mathcal{Z}},\tilde{\tau}) &= \sum_{k=1}^{N} f(\tau_k)(t_k - t_{k-1}) - \sum_{k=1}^{\tilde{N}} f(\tilde{\tau}_k)(\tilde{t}_k - \tilde{t}_{k-1}) \\ &\le \sum_{k=1}^{n} f(\tfrac{k}{n})(\tfrac{k}{n} - \tfrac{k-1}{n}) - \sum_{k=1}^{n} f(\tfrac{k-1}{n})(\tfrac{k}{n} - \tfrac{k-1}{n}) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(f(\tfrac{k}{n}) - f(\tfrac{k-1}{n})\big) = \frac{1}{n}\big(f(1) - f(0)\big). \end{aligned}$$

Vertauscht man die Rollen von $S(\mathcal{Z},\tau)$ und $S(\tilde{\mathcal{Z}},\tilde{\tau})$, erhält man ebenso

$$S(\tilde{\mathcal{Z}},\tilde{\tau}) - S(\mathcal{Z},\tau) \le \frac{1}{n}\big(f(1) - f(0)\big),$$

insgesamt also

$$\begin{aligned} \|S(\mathcal{Z},\tau) - S(\tilde{\mathcal{Z}},\tilde{\tau})\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} |S(\mathcal{Z},\tau)(x) - S(\tilde{\mathcal{Z}},\tilde{\tau})(x)| \\ &\le \frac{1}{n}\sup_{x\in[0,1]}\big(f(1)(x) - f(0)(x)\big) = \varepsilon\|f(1) - f(0)\|_\infty = \varepsilon. \end{aligned}$$

Nach Aufgabe 1.1.6 folgt hieraus die Integrierbarkeit von f.
Will man das Integral $\int_0^1 f(s)\,\mathrm{d}s$ ausrechnen, beobachtet man, dass die Abbildung $\varphi_x\colon u \mapsto u(x)$ für jedes $x \in [0,1]$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathbb{X}$ ist. Laut Vorlesung gilt also

$$\Big(\int_0^1 f(s)\mathrm{d}s\Big)(x) = \varphi_x\Big(\int_0^1 f(s)\mathrm{d}s\Big) = \int_0^1 \varphi_x(f(s))\mathrm{d}s = \int_0^1 f(s)(x)\mathrm{d}s = \int_x^1 1\mathrm{d}s = (1-x).$$

Das bedeutet, dass $\int_0^1 f(s)\,\mathrm{d}s$ die Funktion $x \mapsto (1-x)$ ist.
Bemerkung: Im Beweis der Integrierbarkeit wurde nur verwendet, dass f punktweise monoton wächst. Man kann aber auch direkt mittels Definition nachrechnen, dass f integrierbar ist und das Integral $x \mapsto (1-x)$ ist, wenn man die konkrete Formel für f nutzt, siehe die Musterlösung von Aufgabe 2 (d) der Vorlesung Funktionalanalysis 2 im Wintersemester 2009/10 unter `http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ws09/fa2/exercises.html`.

(b) f ist in jedem Punkt $t \in [0,1]$ unstetig.

Lösung: Sei $t_0 \in [0,1]$. Für jedes $t \in [0,1]$ mit $t \neq t_0$ gilt

$$\|f(t) - f(t_0)\|_\infty \ge |f(t)(\xi) - f(t_0)(\xi)| = 1$$

mit ξ zwischen t und t_0. Insbesondere ist also

$$\liminf_{t\to t_0} \|f(t) - f(t_0)\|_\infty \ge 1,$$

was zeigt, dass f in t_0 unstetig ist.

6. Seien $\mathbb{X}$ und $\mathbb{Y}$ Banachräume, $T\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ linear und stetig, und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{X}$ integrierbar. Zeige, dass dann auch $T \circ f\colon [a,b] \to \mathbb{Y}$ integrierbar ist und

$$T\Big(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big) = \int_a^b T(f(t))\,\mathrm{d}t$$

gilt!

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition gibt es eine Zerlegung $\mathcal{Z}_\varepsilon$ mit der Eigenschaft, dass für jede Verfeinerung $\mathcal{Z}$ und jeden Zwischenpunktvektor τ die Abschätzung

$$\Big\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S(f,\mathcal{Z},\tau) \Big\| < \varepsilon$$

gilt. Wegen Linearität ist

$$S(T\circ f,\mathcal{Z},\tau) = \sum_{k=1}^N (T\circ f)(\tau_k)(t_k - t_{k-1}) = T\Big(\sum_{k=1}^N f(\tau_k)(t_k - t_{k-1})\Big) = T\big(S(f,\mathcal{Z},\tau)\big)$$

und somit

$$\Big\| T\Big(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S(T\circ f,\mathcal{Z},\tau)\Big\| \le \|T\| \Big\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S(f,\mathcal{Z},\tau) \Big\| < \varepsilon \|T\|.$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, zeigt dies nach Definition die Integrierbarkeit von $T\circ f$ mit

$$\int_a^b (T\circ f)(t)\,\mathrm{d}t = T\Big(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big).$$

7. Sei $I = [t_0, T)$, $T > t_0$, und sei u eine stetige, reellwertige Funktion auf I. Zeige:

(a) Seien α und β stetige, reellwertige Funktionen auf I mit $\beta(t) \ge 0$ für alle $t \in I$. Ist $u(t) \le \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s)u(s)\,\mathrm{d}s$ für alle $t \in I$, so gilt

$$u(t) \le \alpha(t) + \int_{t_0}^t \alpha(s)\beta(s)\,\mathrm{e}^{\int_s^t \beta(r)\,\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}s$$

für alle $t \in I$.
Tipp: Beachte die Anleitung zu Aufgabe 1.2.1 im Skript.

Lösung: Wie in der Anleitung im Skript definieren wir

$$v(t) := \int_{t_0}^t \beta(s)u(s)\,\mathrm{d}s.$$

Dann ist v eine stetig differenzierbare Funktion und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(v(t)\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t \beta(r)\,\mathrm{d}r}\Big) &= \big(v'(t) - v(t)\beta(t)\big)\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t \beta(r)\,\mathrm{d}r}\\ &= \beta(t)\big(u(t) - v(t)\big)\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t \beta(r)\,\mathrm{d}r}\\ &\le \alpha(t)\beta(t)\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t \beta(r)\,\mathrm{d}r}\end{aligned}$$

nach Voraussetzung, wobei $\beta(t) \ge 0$ ausgenutzt wurde. Integriert man diese Ungleichung von t_0 bis t, so erhält man

$$v(t)\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t \beta(r)\,\mathrm{d}r} \le \int_{t_0}^t \alpha(s)\beta(s)\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^s \beta(r)\,\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}s,$$

was unter Verwendung der Voraussetzung zu

$$u(t) \le \alpha(t) + v(t) \le \alpha(t) + \int_{t_0}^t \alpha(s)\beta(s)\,\mathrm{e}^{\int_s^t \beta(r)\,\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}s$$

führt.

(b) Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \geq 0$ mit $u(t) \leq a + b\int_{t_0}^t u(s)\,\mathrm{d}s$ für alle $t \in I$ gegeben. Dann ist $u(t) \leq a\,\mathrm{e}^{b(t-t_0)}$ für alle $t \in I$.

Lösung: Aus dem vorigen Aufgabenteil ergibt sich in diesem Spezialfall

$$u(t) \leq a + \int_{t_0}^t ab\,\mathrm{e}^{(t-s)b}\ \mathrm{d}s = a - a(1 - \mathrm{e}^{(t-t_0)b}) = a\,\mathrm{e}^{b(t-t_0)}\,.$$

(c) Ist u stetig differenzierbar und gilt $u'(t) \leq cu(t)$ für alle $t \in I$ mit einem $c \geq 0$, so ist $u(t) \leq u(t_0)\,\mathrm{e}^{c(t-t_0)}$ für alle $t \in I$.

Lösung: Aus $u'(t) \leq cu(t)$ folgt durch Integration

$$u(t) - u(t_0) \leq c\int_{t_0}^t u(s)\,\mathrm{d}s.$$

Der vorige Aufgabenteil liefert nun die Bahauptung.

8. Seien $a < b$ reelle Zahlen und $\mathbb{X}$ ein Banachraum. Es bezeichne $\mathrm{C}^1([a,b];\mathbb{X})$ den Vektorraum der stetig differenzierbaren $\mathbb{X}$-wertigen Funktionen auf $[a,b]$. Zeige, dass

$$\|u\|_1 \coloneqq \|u(a)\|_{\mathbb{X}} + \sup_{t\in[a,b]} \|u'(t)\|_{\mathbb{X}}$$

eine Norm auf $\mathrm{C}^1([a,b];\mathbb{X})$ definiert, bezüglich der dieser Raum vollständig ist!

Lösung: Wir rechnen die Eigenschaften einer Norm nach. Da jede stetige Funktion auf der kompakten Menge $[a,b]$ beschränkt ist, ist $\|u\|_1 < \infty$ für alle $u \in \mathrm{C}^1([a,b];\mathbb{X})$. Ist $u = 0$, so ist $u(a) = 0$ und $u'(t) = 0$ für alle $t \in [a,b]$, also $\|u\|_1 = 0$. Sei nun umgekehrt $\|u\|_1 = 0$. Dann ist $u(a) = 0$ und $u'(t) = 0$ für alle $t \in [a,b]$. Da u eine Stammfunktion von u' ist, gilt somit nach Vorlesung

$$u(t) = u(a) + \int_a^t u'(s)\,\mathrm{d}s = 0$$

für alle $t \in [a,b]$, also $u = 0$. Die Homogenität der Norm folgt aus der Homogenität der Norm auf $\mathbb{X}$ und der Supremumsbildung. Sind u und v in $\mathrm{C}^1([a,b];\mathbb{X})$, so ist

$$\begin{aligned}\|u+v\|_1 &= \|u(a)+v(a)\| + \sup_{t\in[a,b]} \|u'(t)+v'(t)\| \\ &\leq \|u(a)\| + \|v(a)\| + \sup_{t\in[a,b]} (\|u'(t)\| + \|v'(t)\|) \leq \|u\|_1 + \|v\|_1.\end{aligned}$$

Das zeigt, dass $\|\cdot\|_1$ auf $\mathrm{C}^1([a,b];\mathbb{X})$ eine Norm ist.

Sei nun (u_n) eine Cauchy-Folge in $\mathrm{C}^1([a,b];\mathbb{X})$. Wegen $\|u_n'(t) - u_m'(t)\|_{\mathbb{X}} \leq \|u_n - u_m\|_1$ existiert der Grenzwert $v(t) \coloneqq \lim_{n\to\infty} u_n'(t)$ für jedes $t \in [a,b]$. Genauer gesagt gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|u_n'(t) - v(t)\|_{\mathbb{X}} = \limsup_{m\to\infty} \|u_n'(t) - u_m'(t)\|_{\mathbb{X}} \leq \limsup_{m\to\infty} \|u_n - u_m\|_1 \leq \varepsilon$$

für alle $t \in [a,b]$, weil (u_n) eine Cauchy-Folge ist. Das bedeutet, dass (u_n') auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen v konvergiert.

Wir zeigen, dass v stetig ist. Sei dazu $t_0 \in [a,b]$. Ist nun $\varepsilon > 0$, so gibt es nach den obigen Überlegungen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|u_n'(t) - v(t)\| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Weil u_{n_0} stetig ist, gibt es $\delta > 0$ mit $\|u_{n_0}'(t) - u_{n_0}'(t_0)\| \leq \varepsilon$ für $|t - t_0| < \delta$. Folglich ist

$$\|v(t) - v(t_0)\| \leq \|v(t) - u_{n_0}(t)\| + \|u_{n_0}(t) - u_{n_0}(t_0)\| + \|u_{n_0}(t_0) - v(t_0)\| \leq 3\varepsilon$$

für $|t - t_0| < \delta$. Weil $\varepsilon > 0$ und $t_0 \in [a,b]$ beliebig waren, zeigt dies die Stetigkeit von v auf $[a,b]$.

Wegen $\|u_n(a) - u_m(a)\| \leq \|u_n - u_m\|_1$ ist $(u_n(a))$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{X}$. Es existiert also $x \coloneqq \lim_{n\to\infty} u_n(a)$. Nach Aufgabe 4 definiert

$$u(t) \coloneqq x + \int_{t_0}^{t} v(s)\,\mathrm{d}s.$$

eine Funktion u in $\mathrm{C}^1([a,b];\mathbb{X})$ mit $u' = v$. Nun gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \|u_n - u\|_1 \leq \limsup_{n\to\infty} \|u_n(a) - x\| + \limsup_{n\to\infty} \sup_{t\in[a,b]} \|u_n'(t) - v(t)\| \to 0$$

nach Wahl von x und v, was die Konvergenz von (u_n) in $\mathrm{C}^1([a,b];\mathbb{X})$ gegen u zeigt. Wir haben nachgewiesen, dass jede Cauchy-Folge konvergiert.