Prof. Dr. W. Balser
Robin Nittka
Sommersemester 2010

Differentialgleichungen II: Blatt 3

9. Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $0 \in U$. Sei $A\colon U \to \mathbb{C}^{n\times n}$ holomorph und $x\colon U \to \mathbb{C}^n$ eine Lösung der Gleichung $x'(z) = A(z)x(z)$. Wir schreiben $x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k$. Zeige:

(a) Ist $A(z) \equiv A_0$ konstant, so ist $x_k = \frac{A_0^k x_0}{k!}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Schlussfolgere, dass $x(z) = \mathrm{e}^{A_0 z}\, x_0$ gilt!

(b) Sei $c_0 \coloneqq 1$ und $c_{\ell+1} \coloneqq (3\ell+1)c_\ell$ für $\ell \geq 0$, also $c_\ell = \prod_{i=0}^{\ell-1}(3i+1)$. Man kann dies unter Verwendung des *Pochhammer-Symbols* $(a)_0 \coloneqq 1$, $(a)_j \coloneqq a(a+1)\cdots(a+j-1)$ für $j \geq 1$ auch als $c_\ell = 3^\ell(\frac{1}{3})_\ell$ für $\ell \geq 0$ ausdrücken. Ist $x(0) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ und $A(z) = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\z&0\end{smallmatrix}\right)$, so ist

$$x_{3\ell} = \begin{pmatrix}\frac{c_\ell}{(3\ell)!}\\ 0\end{pmatrix}, \quad x_{3\ell+1} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad x_{3\ell+2} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{c_{\ell+1}}{(3\ell+2)!}\end{pmatrix}$$

für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$.

10. (a) Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ ein Gebiet. Die Funktion $f\colon G \to \mathbb{K}^n$ erfülle die Bedingungen des Satzes von Picard-Lindelöf. Für $(t_0, x_0) \in G$ bezeichnen wir mit $x(t; t_0, x_0)$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ auf dem maximalen Lösungsintervall $I(t_0, x_0) \subset \mathbb{R}$. Sei $(t_0, x_0) \in G$ und $t_1 \in I(t_0, x_0)$. Setze $x_1 \coloneqq x(t_1; t_0, x_0)$. Dann ist natürlich $(t_1, x_1) \in G$. Zeige, dass $I(t_0, x_0) = I(t_1, x_1)$ und $x(t; t_0, x_0) = x(t; t_1, x_1)$ für alle $t \in I(t_0, x_0) = I(t_1, x_1)$ gilt!

(b) Sei $G \subset \mathbb{K}^n$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{K}^n$ stetig differenzierbar. Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie im vorigen Aufgabenteil, diesmal in Bezug auf das Anfangswertproblem $x'(t) = f(x(t))$, $x(0) = x_0$. Zeige, dass für alle $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in G$ die Relationen $I(t_0, x_0) = I(0, x_0) + t_0$ und $x(t; t_0, x_0) = x(t - t_0; 0, x_0)$ erfüllt sind für $t \in I(t_0, x_0)$ erfüllt sind!

(c) In der Situation des vorigen Aufgabenteils nehmen wir an, dass für alle t_0 und x_0 stets $I(t_0, x_0) = \mathbb{R}$ gilt. Sei für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Funktion Φ_t auf G durch $\Phi_t(x_0) \coloneqq x(t; 0, x_0)$ definiert. Zeige, dass $\Phi_t\colon G \to G$ für jedes $t \geq 0$ stetig ist und das *Halbgruppengesetz* $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ erfüllt!
Hinweis: Für die Stetigkeit von Φ_t genügt ein Verweis auf die passende Stelle im Skript.

(d) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Schlussfolgere aus dem vorigen Aufgabenteil die Funktionalgleichung $\mathrm{e}^{(t+s)A} = \mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{sA}$ für $s, t \in \mathbb{R}$, die bereits aus Aufgabe 2 bekannt ist!