Prof. Dr. W. Balser
Robin Nittka
Sommersemester 2010

Lösungen Differentialgleichungen II: Blatt 3

9. Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $0 \in U$. Sei $A\colon U \to \mathbb{C}^{n\times n}$ holomorph und $x\colon U \to \mathbb{C}^n$ eine Lösung der Gleichung $x'(z) = A(z)x(z)$. Wir schreiben $x(z) = \sum_{k=0}^\infty x_k z^k$. Zeige:

(a) Ist $A(z) \equiv A_0$ konstant, so ist $x_k = \frac{A_0^k x_0}{k!}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Schlussfolgere, dass $x(z) = \mathrm{e}^{A_0 z}\, x_0$ gilt!

Lösung: Nach Bemerkung 1.4.4 ist in diesem Fall $(k+1)x_{k+1} = A_0 x_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit vollständiger Induktion ergibt sich hieraus sofort die geschlossene Formel für x_k. Also ist

$$x(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{A_0^k x_0}{k!} z^k = \sum_{k=0}^\infty \frac{(A_0 z)^k}{k!} x_0 = \mathrm{e}^{A_0 z}\, x_0$$

für alle z im Konvergenzradius der Reihenentwicklung von x. Nach dem Identitätssatz gilt diese Gleichheit somit auf ganz U.

(b) Sei $c_0 \coloneqq 1$ und $c_{\ell+1} \coloneqq (3\ell+1)c_\ell$ für $\ell \geq 0$, also $c_\ell = \prod_{i=0}^{\ell-1}(3i+1)$. Man kann dies unter Verwendung des *Pochhammer-Symbols* $(a)_0 \coloneqq 1$, $(a)_j \coloneqq a(a+1)\cdots(a+j-1)$ für $j \geq 1$ auch als $c_\ell = 3^\ell(\frac{1}{3})_\ell$ für $\ell \geq 0$ ausdrücken. Ist $x(0) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ und $A(z) = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\z&0\end{smallmatrix}\right)$, so ist

$$x_{3\ell} = \begin{pmatrix}\frac{c_\ell}{(3\ell)!}\\ 0\end{pmatrix}, \quad x_{3\ell+1} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad x_{3\ell+2} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{c_{\ell+1}}{(3\ell+2)!}\end{pmatrix}$$

für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$.

Lösung: Wir schreiben $x_k = (u_k, v_k)^T$ mit $u_k, v_k \in \mathbb{C}$. Also ist $u_0 = 1$ und $v_0 = 0$. Nach Bemerkung 1.4.4 ist dann

$$\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Das zeigt die Formel für x_0 und x_1 in der Behauptung. Sei die Formel für alle x_k bis zu einem $k \geq 1$ bewiesen. Nach Bemerkung 1.4.4 ist

$$(k+1)\begin{pmatrix}u_{k+1}\\v_{k+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_k\\v_k\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{k-1}\\v_{k-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_k\\u_{k-1}\end{pmatrix}.$$

Wir unterscheiden drei Fälle. Ist $k+1 = 3\ell$ für ein $\ell \in \mathbb{N}$, so folgt aus der Induktionshypothese und obiger Formel

$$x_{3\ell} = \begin{pmatrix}u_{3\ell}\\v_{3\ell}\end{pmatrix} = \frac{1}{3\ell}\begin{pmatrix}v_{3(\ell-1)+2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{c_\ell}{3\ell\cdot(3\ell-1)!}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{c_\ell}{(3\ell)!}\\0\end{pmatrix}.$$

Ist hingegen $k+1 = 3\ell+1$ für ein $\ell \in \mathbb{N}$, so ergibt sich analog $x_{3\ell+1} = 0$. Im Fall $k+1 = 3\ell+2$ mit $\ell \in \mathbb{N}_0$ schließlich erhalten wir

$$x_{3\ell+2} = \frac{1}{3\ell+2}\begin{pmatrix}0\\ \frac{c_\ell}{(3\ell)!}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{c_\ell(3\ell+1)}{(3\ell+2)!}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{c_{\ell+1}}{(3\ell+2)!}\end{pmatrix}.$$

In allen drei Fällen konnten wir also den Induktionsschritt durchführen. Somit ist die Formel für alle $k \in \mathbb{N}_0$ richtig, was die Behauptung zeigt.

10. (a) Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ ein Gebiet. Die Funktion $f\colon G \to \mathbb{K}^n$ erfülle die Bedingungen des Satzes von Picard-Lindelöf. Für $(t_0, x_0) \in G$ bezeichnen wir mit $x(t; t_0, x_0)$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ auf dem maximalen Lösungsintervall $I(t_0, x_0) \subset \mathbb{R}$. Sei $(t_0, x_0) \in G$ und $t_1 \in I(t_0, x_0)$. Setze $x_1 := x(t_1; t_0, x_0)$. Dann ist natürlich $(t_1, x_1) \in G$. Zeige, dass $I(t_0, x_0) = I(t_1, x_1)$ und $x(t; t_0, x_0) = x(t; t_1, x_1)$ für alle $t \in I(t_0, x_0) = I(t_1, x_1)$ gilt!

Lösung: Sei $y(t) := x(t; t_0, x_0)$ auf $I(t_0, x_0)$ und $z(t) := x(t; t_1, x_1)$ auf $I(t_1, x_1)$. Nach Wahl von x_1 ist dann $y(t_1) = x_1$, und nach Definition ist $z(t_1) = x_1$. Zudem gilt nach Voraussetzung $y'(t) = f(t, y(t))$ und $z'(t) = f(t, z(t))$ auf dem jeweiligen Definitionsbereich der beiden Funktionen.

Die Funktionen y und z lösen also dasselbe Anfangswertproblem. Somit stimmen die beiden Funktionen nach dem Satz von Picard-Lindelöf auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich überein. Da zudem beide Lösungen maximal gewählt sind, kann nicht die eine eine Fortsetzung der anderen sein, was bedeutet, dass ihre Definitionsbereiche zusammenfallen, also $I(t_0, x_0) = I(t_1, x_1)$ gilt.

(b) Sei $G \subset \mathbb{K}^n$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{K}^n$ stetig differenzierbar. Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie im vorigen Aufgabenteil, diesmal in Bezug auf das Anfangswertproblem $x'(t) = f(x(t))$, $x(0) = x_0$. Zeige, dass für alle $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in G$ die Relationen $I(t_0, x_0) = I(0, x_0) + t_0$ und $x(t; t_0, x_0) = x(t - t_0; 0, x_0)$ erfüllt sind für $t \in I(t_0, x_0)$ erfüllt sind!

Lösung: Sei $y(t) := x(t; t_0, x_0)$ auf $I(t_0, x_0)$ und $z(t) := x(t - t_0; 0, x_0)$ auf $I(0, x_0) + t_0$. Dann ist $y(t_0) = x_0$ und $z(t_0) = x_0$. Zudem gilt

$$z'(t) = x'(t - t_0; 0, x_0) = f(x(t - t_0; x, x_0)) = f(z(t))$$

für alle $t \in I(0, x_0) + t_0$. Also lösen y und z dasselbe Anfangswertproblem. Wie im vorigen Aufgabenteil folgt hieraus die Behauptung.

(c) In der Situation des vorigen Aufgabenteils nehmen wir an, dass für alle t_0 und x_0 stets $I(t_0, x_0) = \mathbb{R}$ gilt. Sei für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Funktion Φ_t auf G durch $\Phi_t(x_0) := x(t; 0, x_0)$ definiert. Zeige, dass $\Phi_t\colon G \to G$ für jedes $t \geq 0$ stetig ist und das *Halbgruppengesetz* $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ erfüllt!
Hinweis: Für die Stetigkeit von Φ_t genügt ein Verweis auf die passende Stelle im Skript.

Lösung: Es muss (nach Definition einer Lösung) $x(t; t_0, x_0) \in G$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{K}^n$ gelten, also $\Phi_t(G) \subset G$. Die Stetigkeit von Φ_t ist die Aussage von Abschnitt 1.3.1 im Skript. Schließlich gilt noch für jedes $x_0 \in G$

$$\begin{aligned}\Phi_{t+s}(x_0) &= x(t + s; 0, x_0) = x(t + s; s, x(s; 0, x_0)) = x(t; 0, x(s; 0, x_0)) \\ &= \Phi_t(\Phi_s(x_0)) = (\Phi_t \circ \Phi_s)(x_0)\end{aligned}$$

nach den vorigen beiden Aufgabenteilen, was die Behauptung zeigt.

(d) Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Schlussfolgere aus dem vorigen Aufgabenteil die Funktionalgleichung $\mathrm{e}^{(t+s)A} = \mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{sA}$ für $s, t \in \mathbb{R}$, die bereits aus Aufgabe 2 bekannt ist!

Lösung: Wir betrachten speziell die Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$. Wir wissen schon, dass die Lösung zur Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ durch $x(t) = \mathrm{e}^{tA}\, x_0$ gegeben ist, also $\Phi_t = \mathrm{e}^{tA}$ gilt. Die Funktionalgleichung fällt hier also mit dem Halbgruppengesetz zusammen.