Universität Ulm

Freitag, 11.06.2010

Prof. Dr. W. Balser
Robin Nittka
Sommersemester 2010

Differentialgleichungen II: Blatt 4

11. Seien x_1 und x_2 stetig differenzierbare Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Gilt

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) - x_1(t) \\ x_1^2(t) - 2x_2(t) \end{pmatrix}$$

und $x_1(0)^2 + x_2(0)^2 \le \frac{1}{100}$, so folgt $x_1(t) \to 0$ und $x_2(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

12. Sei $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}^{n\times n}$ stetig. Zeige:

(a) Ist $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$, so sind die Lösungen x von $x'(t) = A(t)x(t)$ genau die Funktionen, die

$$x(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t A(s)\,\mathrm{d}s}\, x(0)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllen.

(b) Ohne die Kommutativitätsbedingung ist die Aussage des vorigen Aufgabenteils falsch.

13. Sei f lokal Lipschitz-stetig. Es gebe $t_0 > 0$ und $\alpha < 1$ mit der Eigenschaft, dass jede Lösung x von $x'(t) = f(x(t))$ die Abschätzung $\|x(t_0)\| \le \alpha \|x(0)\|$ erfüllt. Insbesondere enthalte somit das maximale Lösungsintervall stets t_0. Zeige, dass es für jedes $R > 0$ ein $M \ge 0$ und $\omega > 0$ mit $\|x(t)\| \le M\,\mathrm{e}^{-\omega t} R$ für alle $t \ge 0$ und für jede Lösung x mit $\|x(0)\| \le R$ gibt! Insbesondere ist also die Nulllösung asymptotisch stabil.

14. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und u eine Lösung von $u'(t) = Au(t)$, $u_0 \coloneqq u(0)$.

(a) Zeige, dass es ein $\omega \in \mathbb{R}$ mit $\|u(t)\| \le \mathrm{e}^{\omega t}\,\|u_0\|$ für alle $t \ge 0$ gibt!

(b) Finde eine möglichst allgemeine Bedingung, unter der es ein $\omega \in \mathbb{R}$ mit $\|u(t)\| \le \mathrm{e}^{\omega t}\,\|u_0\|$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.