Prof. Dr. W. Balser
Robin Nittka
Sommersemester 2010

Lösungen Differentialgleichungen II: Blatt 4

11. Seien x_1 und x_2 stetig differenzierbare Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Gilt

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) - x_1(t) \\ x_1^2(t) - 2x_2(t) \end{pmatrix}$$

und $x_1(0)^2 + x_2(0)^2 \leq \frac{1}{100}$, so folgt $x_1(t) \to 0$ und $x_2(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

Lösung: Wir schreiben die Gleichung als

$$x'(t) = Ax(t) + g(x(t))$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

und

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem erfüllt die Voraussetzungen von Satz 2.3.2, denn die Eigenwerte -1 und -2 von A lassen sich sofort ablesen, und für $\varepsilon > 0$ gilt

$$\|g(x)\|^2 = x_1^2 = \|x\|^4 \leq \varepsilon^2 \|x\|^2$$

für $\|x\| \leq \varepsilon$. Wir können in (A8) also $\delta = \varepsilon$ wählen.

Man erhält durch Diagonalisierung von A

$$\mathrm{e}^{tA} = S \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} S^{-1}$$

mit

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Die Matrixnorm der Diagonalmatrix ist offenbar e^{-t}, und die Matrixnormen der anderen beiden Matrizen kann aus den Singulärwerten zu

$$\|S\| = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

und

$$\|S^{-1}\| = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\| \mathrm{e}^{tA} \| \leq \sqrt{2}(1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}) \, \mathrm{e}^{-t}.$$

Man kann im Beweis von Satz 2.3.2 dann beispielsweise $\alpha = 1$ und $\beta = \frac{5}{2}$ wählen. Dann setzt man im Beweis $\varepsilon := \frac{2}{5}$ und $\delta := \varepsilon$. Es ergibt sich, dass für Startwerte x_0 mit $\|x_0\| < \frac{4}{25}$ die Konvergenz gegen 0 richtig ist, und man erhält sogar eine präzise Abschätzung.

Bemerkung: Der Zahlenwert $\frac{1}{100}$ in der Aufgabenstellung gibt Raum für weniger genaue Abschätzungen als diese hier. Insbesondere kann man sich die Berechnung der Singulärwerte ersparen, indem man stattdessen eine Abschätzung für die Matrixnorm verwendet, deren Wert einfacher zu berechnen ist.

12. Sei $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}^{n\times n}$ stetig. Zeige:

(a) Ist $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$, so sind die Lösungen x von $x'(t) = A(t)x(t)$ genau die Funktionen, die

$$x(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t A(s)\,\mathrm{d}s}\, x(0)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllen.

Lösung: Aus der Definition des Integrals und der Exponentialfunktion als Grenzwerte ergibt sich, dass unter obigen Voraussetzungen auch die Matrizen $\mathrm{e}^{\int_0^t A(s)\,\mathrm{d}s}$ und $A(r)$ für alle $t, r \in \mathbb{R}$ kommutieren. Nach der Kettenregel ist somit für jede Funktion dieser Form

$$x'(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t A(s)\,\mathrm{d}s} A(t)x(0) = A(t)x(t).$$

Da zu jedem Anfangswert x_0 auf diese Art eine Lösung gefunden ist, ist wegen Eindeutigkeit jede Lösung von dieser Form.

(b) Ohne die Kommutativitätsbedingung ist die Aussage des vorigen Aufgabenteils falsch.

Lösung: Die Rechnung im vorigen Aufgabenteil zeigt bereits, dass die Aussage genau dann richtig ist, wenn die Matrizen $\mathrm{e}^{\int_0^t A(s)\,\mathrm{d}s}$ und $A(t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ kommutieren. Es ist aber klar, dass dies im Allgemeinen nicht der Fall ist, da man offenbar zu jedem Paar B und C eine Funktion findet mit $A(1) = B$ und $\int_0^1 A(s)\,\mathrm{d}s = C$. Speziell für

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\mathrm{e}^C = I + C$, und

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat man so ein Gegenbeispiel zur Behauptung gefunden.

13. Sei f lokal Lipschitz-stetig. Es gebe $t_0 > 0$ und $\alpha < 1$ mit der Eigenschaft, dass jede Lösung x von $x'(t) = f(x(t))$ die Abschätzung $\|x(t_0)\| \le \alpha \|x(0)\|$ erfüllt. Insbesondere enthalte somit das maximale Lösungsintervall stets t_0. Zeige, dass es für jedes $R > 0$ ein $M \ge 0$ und $\omega > 0$ mit $\|x(t)\| \le M\,\mathrm{e}^{-\omega t} R$ für alle $t \ge 0$ und für jede Lösung x mit $\|x(0)\| \le R$ gibt! Insbesondere ist also die Nulllösung asymptotisch stabil.

Lösung: Sei $R > 0$. Weil $[0, t_0]$ für jeden Anfangswert u_0 mit $\|x_0\| \le R$ im Lösungintervall liegt, gibt es nach Bemerkung 2.1.3 (e) wegen Stetigkeit ein $M \ge 0$ mit

$$\|x(t)\| \le M$$

für $t \in [0, t_0]$, wann immer $\|x_0\| \le R$ gilt. Schreibt man nun $t = nt_0 + s$ mit $s \in [0, t_0)$, so erhält man wegen Autonomie und nach Voraussetzung

$$\|x(t)\| \le M\alpha^n \le c\,\mathrm{e}^{\frac{\log \alpha}{t_0}}$$

weil ja wiederum $\|x(nt_0)\| \le R$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Dies zeigt die Behauptung mit $\omega := -\frac{\log \alpha}{t_0} > 0$.

14. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und u eine Lösung von $u'(t) = Au(t)$, $u_0 := u(0)$.

(a) Zeige, dass es ein $\omega \in \mathbb{R}$ mit $\|u(t)\| \le \mathrm{e}^{\omega t}\, \|u_0\|$ für alle $t \ge 0$ gibt!

Lösung: Dies ist klar für $\omega := \|A\|$.

(b) Finde eine möglichst allgemeine Bedingung, unter der es ein $\omega \in \mathbb{R}$ mit $\|u(t)\| \leq \mathrm{e}^{\omega t} \|u_0\|$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösung: Die Abschätzung lässt sich auch als $\| \mathrm{e}^{-\omega t} \mathrm{e}^{tA} \| \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ schreiben, bedeutet also, dass $\mathrm{e}^{t(A-\omega)}$ unitär ist, denn $\mathrm{e}^{t(A-\omega)}$ und sein Inverses $\mathrm{e}^{-t(A-\omega)}$ haben dann beide Norm höchstens 1.

Wir zeigen, dass e^{itB} genau dann für alle $t \in \mathbb{R}$ unitär ist, wenn B selbstadjungiert (man sagt auch hermitesch) ist. Wir haben dann bewiesen, dass die Abschätzung genau dann für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, wenn A von der Form $iB+\omega$ mit einem selbstadjungierten Operator B und einer reellen Zahl $\omega \in \mathbb{R}$ gilt.

Sei B selbstadjungiert. Dann gibt es eine unitäre Matrix U und eine Diagonalmatrix Λ mit reellen Einträgen, für die $B = U\Lambda U^{-1}$ gilt. In diesem Fall ist

$$\|e^{itB}\| = \|U \,\mathrm{e}^{it\Lambda}\, U^{-1}\| \leq \| \,\mathrm{e}^{it\Lambda} \,\| = 1$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, was zeigt, dass e^{itB} unitär ist.

Sei nun e^{itB} unitär für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $t \mapsto \| \,\mathrm{e}^{itB}\, x_0\|$ für jedes $x_0 \in \mathbb{C}^n$ konstant. Dies zeigt

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \,\mathrm{e}^{itB}\, x_0\|^2 \Big|_{t=0} = 2 \operatorname{Re} \langle x_0, iBx_0 \rangle \,,$$

also

$$\langle Bx_0, x_0 \rangle \in \mathbb{R}$$

für alle $x_0 \in \mathbb{C}^n$. Daraus erhält man mit der Polarisationsgleichung, dass

$$\langle x_0, Bx_0 \rangle = \langle Bx_0, x_0 \rangle$$

für alle $x_0 \in \mathbb{C}^n$ gilt, also dass B selbstadjungiert ist.