Differentialgleichungen II: Blatt 5

15. Seien α und β beliebige reelle Zahlen. Bestimme alle reellen Gleichgewichtslösungen von $x'(t) = \alpha x(t) + \beta x(t)^3$ und untersuche sie auf Stabilität und asymptotische Stabilität!

16. Untersuche die Nulllösung der Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) + x_1(t)^2 - \sin(x_2(t)) \\ x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) + \mathrm{e}^{x_3(t)} - 1 \\ x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) + \frac{x_3(t)^5}{2} \end{pmatrix}$$

auf asymptotische Stabilität!

17. Seien $a, b, c, d > 0$ fest. Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t)(a - bx_2(t)) \\ x_2'(t) &= -x_2(t)(c - dx_1(t)). \end{aligned}$$

Zeige:

(a) Die Gleichung besitzt außer der Nulllösung genau eine Gleichgewichtslösung $g := (g_1, g_2)$. Für diese gilt $g_1 > 0$ und $g_2 > 0$.

(b) Ist $x := (x_1, x_2)$ eine Lösung der Gleichung und gibt es $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_1(t_0) > 0$ und $x_2(t_0) > 0$, so ist $x_1(t) > 0$ und $x_2(t) > 0$ im maximalen Lösungsintervall.

Für den Rest der Aufgabe sei $x = (x_1, x_2) \neq g$ eine globale, positive Lösung. Wir definieren

$$F(y) := dy_1 + by_2 - c\log(y_1) - a\log(y_2)$$

für $y_1, y_2 > 0$. Sei zudem $K := F(x(0))$ und

$$N_K := \{y \in (0,\infty)^2 : F(y) < K\}.$$

Zeige:

(c) Die Menge N_K ist offen, beschränkt und konvex, und $\overline{N_K} \subset (0,\infty)^2$.
Bemerkung: Man mache sich anschaulich klar, dass dann ∂N_K der Träger einer geschlossenen Jordankurve in $(0,\infty)^2$ ist.

(d) $\partial N_K = \{y \in (0,\infty)^2 : F(y) = K\}$.

(e) Die Lösung ist global und es gilt $x(t) \in \partial N_K$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(f) Die Lösung x ist periodisch.