Prof. Dr. W. Balser
Robin Nittka
Sommersemester 2010

Lösungen Differentialgleichungen II: Blatt 5

15. Seien α und β beliebige reelle Zahlen. Bestimme alle reellen Gleichgewichtslösungen von $x'(t) = \alpha x(t) + \beta x(t)^3$ und untersuche sie auf Stabilität und asymptotische Stabilität!

Lösung: Wir behandeln zuerst den Fall $\beta = 0$. Dann hat die Gleichung die Form $x'(t) = \alpha x(t)$. Für $\alpha = 0$ ist für jedes $g \in \mathbb{R}$ die Funktion $x(t) \equiv g$ eine Gleichgewichtslösung, die stabil, aber nicht asymptotisch stabil ist. Ist $\alpha \neq 0$, so ist $x(t) \equiv 0$ die einzige Gleichgewichtslösung, und diese ist für $\alpha < 0$ asymptotisch stabil, für $\alpha > 0$ hingegen instabil, wie aus der Theorie linearer Gleichungen folgt.

Sei nun $\beta \neq 0$. Eine Gleichunggewichtslösung hat man mit $x(t) \equiv g$ genau für

$$\alpha g + \beta g^3 = 0,$$

also nur für $g = 0$, da die Gleichung $\beta g^2 = -\alpha$ nur für $\alpha = 0$ eine reelle Lösung hat, diese dann aber ebenfalls $g = 0$ ist.

Die Gleichung ist von der Form wie in Abschnitt 2.3 im Skript, wobei $\beta x(t)^3$ die kleine Störung ist. Es folgt, dass für $\alpha < 0$ die Lösung asymptotisch stabil, für $\alpha > 0$ die Lösung instabil ist.

Es bleibt noch der Fall $\alpha = 0$ und $\beta \neq 0$ zu behandeln. In diesem Fall löst man die Gleichung für einen Anfangswert $x(0) \neq 0$ zu

$$x(t)^2 = \frac{1}{x(0)^{-2} - 2\beta t}.$$

Also ist die Gleichgewichtslösung für $\beta < 0$ asymptotisch stabil. Für $\beta > 0$ existiert hingegen jede Lösung außer der Gleichgewichtslösung nur auf einem beschränkten Zeitintervall, was insbesondere bedeutet, dass die Gleichgewichtslösung instabil ist.

16. Untersuche die Nulllösung der Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) + x_1(t)^2 - \sin(x_2(t)) \\ x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) + \mathrm{e}^{x_3(t)} - 1 \\ x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) + \frac{x_3(t)^5}{2} \end{pmatrix}$$

auf asymptotische Stabilität!

Lösung: Wir schreiben die Gleichung als

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + g(x(t))$$

mit einer kleinen Störung g, was bedeuten soll, dass $g(0) = 0$ und $g'(0) = 0$ gilt. Berechnet man die Eigenwerte der Linearisierung mit einem Näherungsverfahren (oder Maple), zeigt sich, dass der größte Eigenwert positiv ist (näherungsweise 3.745), weshalb die Gleichgewichtslösung instabil ist.

17. Seien $a, b, c, d > 0$ fest. Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t)(a - bx_2(t)) \\ x_2'(t) &= -x_2(t)(c - dx_1(t)). \end{aligned}$$

Zeige:

(a) Die Gleichung besitzt außer der Nulllösung genau eine Gleichgewichtslösung $g := (g_1, g_2)$. Für diese gilt $g_1 > 0$ und $g_2 > 0$.

Lösung: Für eine Gleichgewichtslösung gilt

$$\begin{aligned} 0 &= g_1(a - bg_2) \\ 0 &= -g_2(c - dg_1). \end{aligned}$$

Ist $g_1 \neq 0$, folgt aus der ersten Gleichung $g_2 = \frac{a}{b} > 0$ und damit aus der zweiten $g_1 = \frac{c}{d} > 0$. Analog schließt man im Fall $g_2 \neq 0$. Also sind Gleichgewichtslösungen nur für $g = 0$ und $g = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ gegeben.

(b) Ist $x := (x_1, x_2)$ eine Lösung der Gleichung und gibt es $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_1(t_0) > 0$ und $x_2(t_0) > 0$, so ist $x_1(t) > 0$ und $x_2(t) > 0$ im maximalen Lösungsintervall.

Lösung: Angenommen, es gibt t_1 im maximalen Lösungsintervall mit $x_1(t_1) = 0$. Beachte, dass $x_1^*(t) \equiv 0$ und $x_2^*(t) = \mathrm{e}^{-c(t-t_1)}\, x_2(t_1)$ ebenfalls die Gleichung löst und am Punkt t_1 mit x übereinstimmt. Nach dem Eindeutigkeitssatz wäre dann $x = x^*$ auf dem maximalen Lösungsintervall $\mathbb{R}$, was $x_1(t_0) > 0$ widerspricht.

Also besitzt x_1 keine Nullstelle, und analog schließt man dies auch für x_2. Nach dem Zwischenwertsatz haben x_1 und x_2 also keine Vorzeichenwechsel, was die Behauptung zeigt.

Für den Rest der Aufgabe sei $x = (x_1, x_2) \neq g$ eine globale, positive Lösung. Wir definieren

$$F(y) := dy_1 + by_2 - c\log(y_1) - a\log(y_2)$$

für $y_1, y_2 > 0$. Sei zudem $K := F(x(0))$ und

$$N_K := \{y \in (0, \infty)^2 : F(y) < K\}.$$

Zeige:

(c) Die Menge N_K ist offen, beschränkt und konvex, und $\overline{N_K} \subset (0, \infty)^2$.
Bemerkung: Man mache sich anschaulich klar, dass dann ∂N_K der Träger einer geschlossenen Jordankurve in $(0, \infty)^2$ ist.

Lösung: Dass N_K offen ist, folgt aus der Stetigkeit von F.

Die Funktion $f(y_1) := dy_1 - c\log(y_1)$ ist stetig und erfüllt $f(y_1) \to \infty$ für $y_1 \to \infty$ und $y_1 \to 0$, ist also nach unten beschränkt durch eine Konstante $M = M(c, d) \in \mathbb{R}$. Es gilt also

$$F(y) \geq by_2 - a\log(y_2) + M.$$

Weil die Funktion $y_2 \mapsto by_2 - a\log(y_2)$ für $y_2 \to 0$ und $y_2 \to \infty$ gegen ∞ geht, gibt es folglich $\varepsilon > 0$ und $R > 0$ mit $F(y) \geq K + 1$ für alle $y_1 > 0$ und $y_2 > 0$, für die $y_2 < \varepsilon$ oder $y_2 > R$ erfüllt ist. Umgekehrt zeigt dies

$$N_K \subset \mathbb{R} \times [\varepsilon, R].$$

Ganz analog schließt man durch Vertauschen der Rollen von y_1 und y_2, dass N_K auch in der ersten Koordinaten beschränkt ist, was insgesamt die Beschränktheit von N_K und die Eigenschaft $\overline{N_K} \subset (0, \infty)^2$ zeigt.

Die Hessematrix von F ist durch

$$F''(y) = \begin{pmatrix} \frac{c}{y_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{y_2^2} \end{pmatrix}$$

gegeben, woraus man direkt deren positive Definitheit und damit die Konvexität von F ablesen kann. Also ist N_K konvex.

(d) $\partial N_K = \{y \in (0,\infty)^2 : F(y) = K\}$.

Lösung: Beachte zuerst, dass man aus

$$\nabla F(y) = \begin{pmatrix} d - \frac{c}{y_1} & b - \frac{a}{y_2} \end{pmatrix}$$

und Konvexität von F erhält, dass g das eindeutig bestimmte globale Minimum von F ist. Insbesondere ist also $K > F(g)$, weil wir vorausgesetzt haben, dass x nicht die Gleichgewichtslösung ist.

Ist $F(y) = K$, so ist also sicherlich $y \neq g$ und somit $\nabla F(y) \neq 0$. Daher gibt es in jeder Umgebung von y einen Punkt z mit $F(z) < K$, was $y \in \partial N_K$ zeigt.

Ist umgekehrt $y \in \partial N_K$, so gibt es in jeder Umgebung von y Punkte z_1 und z_2 mit $F(z_1) < K \leq F(z_2)$, was wegen Stetigkeit $F(y) = K$ zeigt.

(e) Die Lösung ist global und es gilt $x(t) \in \partial N_K$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Lösung: Man rechnet direkt nach, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(x(t)) = 0$ gilt, wo immer x definiert ist und die Gleichung löst, also auf dem maximalen Lösungsintervall. Also ist $F(x(t)) \equiv K$ auf dem maximalen Lösungsintervall, was $x(t) \in \partial N_K$ zeigt.

Da N_K und somit auch ∂N_K beschränkt ist, folgt hieraus, dass x eine beschränkte Lösung ist, also kein blow-up stattfindet. Folglich muss x eine globale Lösung sein, was die Behauptung zeigt.

(f) Die Lösung x ist periodisch.

Lösung: Die Funktion x ist nicht konvergent, da sie sonst ja gegen einen Gleichgewichtspunkt konvergieren müsste, was $x(t) \in \partial N_K$ und $0 \notin \partial N_K$ und $g \notin \partial N_K$ widerspricht. Aus den obigen Beobachtungen erhält man also, dass x die Menge ∂N_K durchläuft. Insbesondere ist x eine periodische Lösung.

Bemerkung: Dieses Argument sollte man eigentlich etwas formular durchführen. Allerdings scheint es dann unvermeidbar zu sein, ein wenig mehr Geometrie (Analyse von Rändern konvexer, beschränkter Mengen) vorauszusetzen, was hier fehl am Platze erscheint.