Universität Ulm

Freitag, 09.07.2010

Prof. Dr. W. Balser
Robin Nittka
Sommersemester 2010

Differentialgleichungen II: Blatt 6

18. Sei

$$Lx = \lambda x, \qquad Ux = 0$$

eine nicht entartete Eigenwertaufgabe auf $[a,b]$, σ die zugehörige Eigenwertmenge und $\mathcal{G}_\lambda$ für $\lambda \notin \sigma$ der Green'sche Operator. Zeige, dass $\mathcal{G}_\lambda$ zu einem beschränkten linearen Operator von $\mathcal{L}_2(a,b)$ nach $\mathrm{C}[a,b]$ fortgesetzt werden kann!
Bemerkung: Diese Aufgabe kombiniert Teile der Aussagen der Aufgaben 3.4.3 und 3.4.4 im Skript. Diese dürfen somit natürlich nicht für den Beweis verwendet werden.

19. Sei L ein nicht entarteter Differentialoperator, für den das Eigenwertproblem

$$Lx = \lambda x, \qquad Ux = 0$$

auf $[a,b]$ selbstadjungiert ist, vergleiche §3.2 und §3.3 im Skript. Es bezeichne σ die Menge der Eigenwerte des Problems. Sei G die zugehörige Green'sche Funktion und $\mathcal{G}_\lambda$ für $\lambda \notin \sigma$ der Green'sche Operator. Laut Vorlesung gibt es ein vollständiges Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{L}_2$ bestehend aus Eigenfunktionen zu zugehörigen Eigenwerten $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeige:

(a) Ist e_n eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ_n, so gilt

$$\mathcal{G}_\lambda e_n = \frac{e_n}{\lambda_n - \lambda}$$

für alle $\lambda \notin \sigma$.

(b) Für jedes $f \in \mathcal{L}_2$ gilt

$$(\mathcal{G}_\lambda f)(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle_{\mathcal{L}_2} \frac{e_n(t)}{\lambda_n - \lambda},$$

wobei die Reihe gleichmäßig bezüglich $t \in [a,b]$ konvergiert.

(c) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n - \mu|^2} < \infty$ für ein $\mu \notin \sigma$, so gilt

$$G(t,\tau,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{e_n(\tau)} e_n(t)}{\lambda_n - \lambda}$$

für alle $\lambda \notin \sigma$, wobei die Konvergenz im Sinne von $\mathcal{L}_2([a,b]^2)$ zu verstehen ist. Inbesondere gilt die Identität für fast alle t und τ, für die die Reihe auf der rechten Seite konvergiert.

20. Berechne Eigenwerte, Eigenfunktionen und Green'sche Funktion für das Problem

$$-x'' = \lambda x, \qquad x(0) = x(1) = 0$$

auf $[0,1]$!