Universität Ulm

Freitag, 09.07.2010

Prof. Dr. W. Balser
Robin Nittka
Sommersemester 2010

Lösungen Differentialgleichungen II: Blatt 6

18. Sei

$$Lx = \lambda x, \qquad Ux = 0$$

eine nicht entartete Eigenwertaufgabe auf $[a, b]$, σ die zugehörige Eigenwertmenge und $\mathcal{G}_\lambda$ für $\lambda \notin \sigma$ der Green'sche Operator. Zeige, dass $\mathcal{G}_\lambda$ zu einem beschränkten linearen Operator von $\mathcal{L}_2(a, b)$ nach $\mathrm{C}[a, b]$ fortgesetzt werden kann!

Bemerkung: Diese Aufgabe kombiniert Teile der Aussagen der Aufgaben 3.4.3 und 3.4.4 im Skript. Diese dürfen somit natürlich nicht für den Beweis verwendet werden.

Lösung: Sei zuerst $f \in \mathrm{C}[a, b]$. Dann ist

$$\big|(\mathcal{G}_\lambda f)(t)\big| = \Big|\int_a^b G(t, \tau, \lambda) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big| \le \Big(\int_a^b |G(t, \tau, \lambda)|^2\,\mathrm{d}\tau\Big)^{1/2} \|f\|_2 \le (b-a)^{1/2} M_\lambda \|f\|_2,$$

wobei

$$M_\lambda := \sup_{t,\tau \in [a,b]} |G(t, \tau, \lambda)|$$

laut Satz 3.3.1 endlich ist. Dies zeigt bereits, dass $\mathcal{G}_\lambda$ zu einem stetigen Operator von $\mathcal{L}_2$ nach $\mathcal{L}_\infty$ fortgesetzt werden kann.

Da aber $\mathcal{G}_\lambda f$ für alle $f \in \mathrm{C}[a, b]$ sogar die Lösung einer Differentialgleichung und insbesondere stetig ist, wird eine dichte Teilmenge bereits in den abgeschlossenen Unterraum $\mathrm{C}[a, b]$ abgebildet. Also bildet der Operator ganz $\mathcal{L}_2$ stetig nach $\mathrm{C}[a, b]$ ab.

19. Sei L ein nicht entarteter Differentialoperator, für den das Eigenwertproblem

$$Lx = \lambda x, \qquad Ux = 0$$

auf $[a, b]$ selbstadjungiert ist, vergleiche §3.2 und §3.3 im Skript. Es bezeichne σ die Menge der Eigenwerte des Problems. Sei G die zugehörige Green'sche Funktion und $\mathcal{G}_\lambda$ für $\lambda \notin \sigma$ der Green'sche Operator. Laut Vorlesung gibt es ein vollständiges Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{L}_2$ bestehend aus Eigenfunktionen zu zugehörigen Eigenwerten $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeige:

(a) Ist e_n eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ_n, so gilt

$$\mathcal{G}_\lambda e_n = \frac{e_n}{\lambda_n - \lambda}$$

für alle $\lambda \notin \sigma$.

Lösung: Nach Satz 3.3.1 ist $\mathcal{G}_\lambda e_n$ die (eindeutige) Lösung des Problems

$$Lx = \lambda x + e_n, \qquad Ux = 0$$

Offenbar löst $x = \frac{e_n}{\lambda_n - \lambda}$ dieses Problem, was die Behauptung zeigt.

(b) Für jedes $f \in \mathcal{L}_2$ gilt

$$(\mathcal{G}_\lambda f)(t) = \sum_{n=1}^\infty \langle f, e_n\rangle_{\mathcal{L}_2} \frac{e_n(t)}{\lambda_n - \lambda},$$

wobei die Reihe gleichmäßig bezüglich $t \in [a, b]$ konvergiert.

Lösung: Weil (e_n) vollständiges Orthonormalsystem bildet, gilt

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle_{\mathcal{L}_2} e_n,$$

wobei die Reihe in der Norm von $\mathcal{L}_2$ konvergiert. Weil $\mathcal{G}_\lambda$ nach der vorigen Aufgabe ein stetiger Operator von $\mathcal{L}_2$ nach $\mathrm{C}[a, b]$ ist, gilt dann

$$\mathcal{G}_\lambda f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle_{\mathcal{L}_2} (\mathcal{G}_\lambda e_n)(t)$$

wobei die Konvergenz gleichmäßig in $t \in [a, b]$ ist.

(c) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n - \mu|^2} < \infty$ für ein $\mu \notin \sigma$, so gilt

$$G(t, \tau, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{e_n(\tau)} e_n(t)}{\lambda_n - \lambda}$$

für alle $\lambda \notin \sigma$, wobei die Konvergenz im Sinne von $\mathcal{L}_2([a, b]^2)$ zu verstehen ist. Inbesondere gilt die Identität für fast alle t und τ, für die die Reihe auf der rechten Seite konvergiert.

Lösung: Sei $\lambda \notin \sigma$ fest. Man sieht sofort, dass die Bedingung in der Voraussetzung nicht von der konkreten Wahl von μ abhängt. Also ist

$$(t, \tau, n) \mapsto \frac{e_n(\tau) e_n(t)}{\lambda_n - \lambda}$$

eine Funktion in $\mathcal{L}_2(\mathbb{N} \times [a, b]^2)$. Nach dem Satz von Fubini ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{e_n(\tau)} e_n(t)}{\lambda_n - \lambda}$$

konvergent in $\mathcal{L}_2([a, b]^2)$, und andererseits gilt nach Fubini und dem vorigen Aufgabenteil

$$\int_a^b G(t, \tau, \lambda) f(\tau) \, \mathrm{d}\tau = (\mathcal{G}_\lambda f)(t) = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{e_n(\tau)} e_n(t)}{\lambda_n - \lambda} f(\tau) \, \mathrm{d}\tau$$

für alle $f \in \mathcal{L}_2$ im Sinne von $\mathcal{L}_2$-Funktionen in t. Das bedeutet, dass für alle $f, g \in \mathcal{L}_2$

$$\int_a^b \int_a^b \Big(G(t, \tau, \lambda) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{e_n(\tau)} e_n(t)}{\lambda_n - \lambda} \Big) f(\tau) g(t) \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}t = 0$$

gilt. Weil Funktionen der Form $(t, \tau) \mapsto f(\tau) g(t)$ in $\mathcal{L}_2([a, b]^2)$ dicht sind, zeigt dies die Behauptung.

Die Zusatzbehauptung folgt sofort aus der Tatsache, dass eine $\mathcal{L}_2$-konvergente Folge nach Übergang zu einer Teilfolge punktweise fast überall gegen ihren Grenzwert konvergiert.

20. Berechne Eigenwerte, Eigenfunktionen und Green'sche Funktion für das Problem

$$-x'' = \lambda x, \qquad x(0) = x(1) = 0$$

auf $[0, 1]$!

Lösung: Für $\lambda = 0$ lösen nur affin lineare Funktionen die Differentialgleichung, von denen nur $x = 0$ zudem die Randbedingungen erfüllt. Also ist 0 kein Eigenwert, was zeigt, dass das Problem nicht entartet ist. Aus der Vorlesung ist bereits bekannt, dass das Problem selbstadjungiert ist. Wir müssen also nur nach reellen Eigenwerten suchen.

Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ beliebig. Aus den Grundvorlesungen ist bekannt, dass

$$x_{\pm}(t) = \mathrm{e}^{\pm\sqrt{-\lambda}t}$$

ein Fundamentalsystem der Gleichung bildet, wobei $\sqrt{-\lambda}$ komplex sein kann. Um die Bedingung $x(0) = 0$ zu erfüllen, können wir also nur bis auf skalare Vielfache nur

$$x(t) = \mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}t} - \mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}t}$$

als Lösung zulassen. Ist nun $\lambda < 0$ (und $\sqrt{-\lambda} > 0$), so ist dieser Ausdruck für alle $t > 0$ positiv, was der Bedingung $x(1) = 0$ widerspricht. Also ist $\lambda > 0$ zur Erfüllung der Gleichung nötig, und wir schreiben dann

$$x(t) = \mathrm{e}^{i\sqrt{\lambda}t} - \mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda}t} = 2i\sin(\sqrt{\lambda}t).$$

wobei wir per Konvention $\sqrt{\lambda} > 0$ wählen. Die Bedingung $x(1) = 0$ ist dann äquivalent zu $\sqrt{\lambda} \in \pi\mathbb{Z}$. Wir haben also die (normierten) Eigenfunktionen

$$e_n(t) = \sqrt{2}\sin(n\pi t)$$

zu den Eigenwerten

$$\lambda_n = n^2\pi^2$$

mit $n \in \mathbb{N}$ gefunden und zudem gezeigt, dass das Problem keine weiteren Eigenfunktionen besitzt.

Alternativ hätte man die Eigenfunktionen raten können und danach (beispielsweise mit Fourierreihentheorie) zeigen müssen, dass sie bereits ein vollständiges Orthonormalsystem bilden, um nachzuweisen, dass es keine weiteren gibt.

Wir sind nun in der Situation des letzten Aufgabenteils der vorigen Aufgabe. Also ist die Green'sche Funktion durch

$$G(t, \tau, \lambda) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi t)\sin(n\pi\tau)}{\pi^2 n^2 - \lambda}$$

gegeben. Man könnte G auch konkreter ausrechnen, indem man den Beweis von Satz 3.3.1 nachverfolgt.