Prof. Dr. W. Balser
Robin Nittka
Sommersemester 2010

Differentialgleichungen II: Blatt 7

21. Sei $G := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, a auf G holomorph, und sei x in einer Umgebung von $z = 1$ eine Lösung der Gleichung $x'(z) = a(z)x(z)$ mit $x(1) \neq 0$. Zeige:

(a) Ist $a(z) = \frac{\alpha}{z}$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$, so hat x genau für $\alpha \in \mathbb{Z}$ eine holomorphe Fortsetzung auf ganz G.

(b) Sei der Poincaré-Rand r von 0 endlich. Dann gibt es eine ganze Funktion F mit $F(0) \neq 0$, ein Polynom Q vom Grad r (bzw. $Q \equiv 0$ falls $r = 0$) mit $Q(0) = 0$ und eine Zahl $L \in \mathbb{C}$, für die

$$x(z) = F(z) z^L \, e^{Q(1/z)}$$

in einer Umgebung von $z = 1$ erfüllt ist, wobei wir für $z^L = e^{L \log(z)}$ den Hauptzweig des Logarithmus wählen.

(c) Eine Funktion x lässt sich auf einem Gebiet in $\mathbb{C}$ auf höchstens eine Art als

$$x(z) = F(z) z^L \, e^{Q(1/z)}$$

mit einer ganzen Funktion F mit $F(0) \neq 0$, einer Zahl $L \in \mathbb{C}$ und einem Polynom Q mit $Q(0) = 0$ schreiben.

Bemerkung: Durch Umskalieren ergibt sich, dass es genau eine Lösung dieser Form von $x'(z) = a(z)x(z)$ gibt, für die zusätzlich $F(1) = 1$ gilt.

22. Sei $r \in \mathbb{N}$. Bestimme den Poincaré-Rang des Systems

$$x'(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z^{-r-1} & 0 \end{pmatrix} x(z),$$

berechne ein Fundamentalsystem X mit $X(1) = I$, und entscheide, ob die Singularität $z = 0$ regulär ist!

23. Seien m und n natürliche Zahlen, $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $C \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Es gebe keine komplexe Zahl, die gleichzeitig Eigenwert von A und B ist. Zeige, dass es dann genau eine Matrix $X \in \mathbb{C}^{m \times n}$ gibt, für die

$$AX - XB = C$$

gilt!