Universität Ulm

Freitag, 23.07.2010

Prof. Dr. W. Balser
Robin Nittka
Sommersemester 2010

# Lösungen Differentialgleichungen II: Blatt 7

**21.** Sei $G := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a$ auf $G$ holomorph, und sei $x$ in einer Umgebung von $z = 1$ eine Lösung der Gleichung $x'(z) = a(z)x(z)$ mit $x(1) \neq 0$. Zeige:

(a) Ist $a(z) = \frac{\alpha}{z}$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$, so hat $x$ genau für $\alpha \in \mathbb{Z}$ eine holomorphe Fortsetzung auf ganz $G$.

**Lösung:** Die Lösung ist in einer Umgebung der 0 offenbar durch

$$x(z) = \mathrm{e}^{\alpha \log(z)}\, x(1) = z^\alpha x(1)$$

gegeben, wobei wir den Hauptzweig des Logarithmus wählen. Die Funktion $x$ besitzt genau dann eine holomorphe Fortsetzung auf $G$, wenn sich aus der oberen und aus der unteren Halbebene die gleiche Fortsetzung auf die negative reelle Achse ergibt, also

$$\lim_{\vartheta \to \pi} \mathrm{e}^{\alpha(\log(r)+i\vartheta)} = \lim_{\vartheta \to -\pi} \mathrm{e}^{\alpha(\log(r)+i\vartheta)}$$

für alle $r > 0$ erfüllt ist. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$\mathrm{e}^{\alpha\pi i} = \mathrm{e}^{-\alpha\pi i}$$

gilt, was wiederum zu

$$2\pi i\alpha \in 2\pi i\mathbb{Z}$$

äquivalent ist, also zu $\alpha \in \mathbb{Z}$.

(b) Sei der Poincaré-Rand $r$ von 0 endlich. Dann gibt es eine ganze Funktion $F$ mit $F(0) \neq 0$, ein Polynom $Q$ vom Grad $r$ (bzw. $Q \equiv 0$ falls $r = 0$) mit $Q(0) = 0$ und eine Zahl $L \in \mathbb{C}$, für die

$$x(z) = F(z) z^L \mathrm{e}^{Q(1/z)}$$

in einer Umgebung von $z = 1$ erfüllt ist, wobei wir für $z^L = \mathrm{e}^{L \log(z)}$ den Hauptzweig des Logarithmus wählen.

**Lösung:** Nach Definition ist

$$a(z) = \sum_{n=-r-1}^{\infty} a_n z^n$$

mit gewissen Koeffizienten $a_n$, wobei $a_{-r-1} \neq 0$ gilt. Eine Stammfunktion $A$ von $a$ ist durch

$$A(z) = \sum_{n=-r-1}^{-2} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + a_{-1}\log(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = Q(1/z) + L\log(z) + f(z)$$

mit

$$Q(w) := -\sum_{n=1}^{r} \frac{a_{-n-1}}{n} w^n$$

und $L := a_{-1}$ gegeben, wobei

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$$

eine ganze Funktion ist, da die Laurentreihe auf ganz $G$ konvergiert. Offenbar erfüllt $Q$ die Gradbedingung und $Q(0) = 0$.
Die Lösung $x$ von $x'(z) = a(z)x(z)$ hat die Form

$$x(z) = c\,\mathrm{e}^{A(z)}$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{C}$. Wir setzen $F(z) := c\,\mathrm{e}^{f(z)}$. Dann ist $F$ eine ganze Funktion und es gilt

$$x(z) = c\,\mathrm{e}^{Q(1/z)+L\log(z)+f(z)} = F(z)z^L\,\mathrm{e}^{Q(1/z)}$$

wie behauptet.

(c) Eine Funktion $x$ lässt sich auf einem Gebiet in $\mathbb{C}$ auf höchstens eine Art als

$$x(z) = F(z)z^L\,\mathrm{e}^{Q(1/z)}$$

mit einer ganzen Funktion $F$ mit $F(0) \neq 0$, einer Zahl $L \in \mathbb{C}$ und einem Polynom $Q$ mit $Q(0) = 0$ schreiben.

**Lösung:** Seien $F_1$ und $F_2$ ganze Funktionen, $L_1$ und $L_2$ in $\mathbb{C}$ und $Q_1$ und $Q_2$ Polynome, es sei $F_1(0) \neq 0$, $F_2(0) \neq 0$, $Q_1(0) = 0$, $Q_2(0) = 0$, und es gelte

$$F_1(z)z^{L_1}\,\mathrm{e}^{Q_1(1/z)} = F_2(z)z^{L_2}\,\mathrm{e}^{Q_2(1/z)}$$

auf einem Gebiet. Dann hat

$$\mathrm{e}^{(L_1-L_2)\log(z)} = \frac{z^{L_1}}{z^{L_2}} = \frac{F_2(z)}{F_1(z)}\,\mathrm{e}^{Q_2(1/z)-Q_1(1/z)}$$

eine meromorphe Fortsetzung auf $G$, was nur für $k := L_1 - L_2 \in \mathbb{Z}$ der Fall sein kann, vergleiche hierzu den ersten Aufgabenteil. In diesem Fall ist dann aber die linke Seite der Gleichung eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$, was zeigt, dass $z = 0$ keine wesentliche Singularität von

$$\mathrm{e}^{Q_2(1/z)-Q_1(1/z)}$$

ist, also dass sich $Q_1$ und $Q_2$ höchstens um eine additive Konstante unterscheiden können. Wegen $Q_1(0) = 0 = Q_2(0)$ folgt hieraus $Q_1 = Q_2$ und wir haben

$$z^k = \frac{F_2(z)}{F_1(z)}$$

bewiesen. Weil die rechte Seite nach Voraussetzung in einer Umgebung von $z = 0$ holomorph und nullstellenfrei ist, muss $k = 0$ sein, also $L_1 = L_2$ gelten, und dann folgt aus der vorigen Gleichung auch $F_1 = F_2$.

**Bemerkung:** Durch Umskalieren ergibt sich, dass es genau eine Lösung dieser Form von $x'(z) = a(z)x(z)$ gibt, für die zusätzlich $F(1) = 1$ gilt.

**22.** Sei $r \in \mathbb{N}$. Bestimme den Poincaré-Rang des Systems

$$x'(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z^{-r-1} & 0 \end{pmatrix} x(z),$$

berechne ein Fundamentalsystem $X$ mit $X(1) = I$, und entscheide, ob die Singularität $z = 0$ regulär ist!

**Lösung:** Der Poincaré-Rang ist offenbar $r$. Man bestimmt leicht das Fundamentalsystem

$$X(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{r}z^{-r} & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun ist also $|X(z)| \leq c|z|^{-r}$ für eine Konstante $c \geq 0$. Weil jede Lösung Linearkombination der Spalten von $X$ ist, zeigt dies, dass jede Lösung der Gleichung bei $z = 0$ höchstens wie eine Potenz von $z^{-1}$ wächst, also dass 0 ein regulärer Punkt des Systems ist.

**23.** Seien $m$ und $n$ natürliche Zahlen, $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $C \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Es gebe keine komplexe Zahl, die gleichzeitig Eigenwert von $A$ und $B$ ist. Zeige, dass es dann genau eine Matrix $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$ gibt, für die

$$AX - XB = C$$

gilt!

**Lösung:** Die Gleichung $AX - XB = C$ ist ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit $mn$ Gleichungen und ebensovielen Unbekannten. Die eindeutige Lösbarkeit für jede rechte Seite ist also äquivalent dazu, dass das homogene Gleichungssystem $AX - BX = 0$ nur die triviale Lösung $X = 0$ besitzt. Sei also $X$ eine Matrix mit $AX - XB = 0$. Wir müssen nur $X = 0$ zeigen.

Sei $\lambda$ ein Eigenvektor von $B$. Es ist

$$(A - \lambda)X - X(B - \lambda) = 0,$$

also

$$X = (A - \lambda)^{-1}X(B - \lambda),$$

da $A - \lambda$ nach Voraussetzung invertierbar ist. Wir zeigen per Induktion nach $p$, dass $Xv = 0$ für jeden Hauptvektor $v$ der Stufe $p \in \mathbb{N}$ von $B$ zum Eigenwert $\lambda$ gilt, also für alle $v$ mit $(B - \lambda)^p v = 0$ und $(B - \lambda)^{p-1}v \neq 0$.

Für $p = 1$ ist dies wegen

$$Xv = (A - \lambda)^{-1}X(B - \lambda)v = 0$$

für alle $v$ mit $(B - \lambda)v = 0$ klar. Sei die Behauptung für ein $p$ richtig, und sei $v$ ein Hauptvektor der Stufe $p + 1$. Dann ist $w := (B - \lambda)v$ ein Hauptvektor der Stufe $p$ und somit nach Induktionshypothese $Xw = 0$. Folglich ist

$$Xv = (A - \lambda)^{-1}X(B - \lambda)v = (A - \lambda)^{-1}Xw = 0,$$

was die Behauptung zeigt.

Wir haben gezeigt, dass $X$ auf allen Haupträumen von $B$ verschwindet. Da $\mathbb{C}^n$ eine direkte Summe dieser Haupträume ist, wie aus der Theorie zur Jordan'schen Normalform bekannt ist, muss bereits $X = 0$ gelten. Dies zeigt nach der einführenden Erklärung die Behauptung.