Universität Ulm

Mittwoch, 16.06.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 20+2

Elementare Funktionentheorie: Blatt 1

1. Bestimme Realteil, Imaginärteil und Betrag folgender komplexer Zahlen:

(a) $3 + i$; (2)

(b) $\exp(\frac{\pi i}{2})$; (2)

(c) $\frac{2+3i}{1+i}$; (2)

(d) $\frac{1}{z}$ für $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$; (2)

(e) $|\overline{z}|$ für $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. (2)

2. Stelle folgende komplexe Zahlen in Polarkoordinaten dar:

(a) $1 + i$; (2)

(b) $\exp(2 + 7i)$; (2)

(c) $-\sqrt{3} + i$. (2)

3. Es ist bekannt, dass die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ surjektiv, $2\pi i$-periodisch und auf dem Streifen $S := \mathbb{R} + i[0, 2\pi)$ injektiv ist. Zeige:

(a) Ist $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, so gibt es unendlich viele Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $\exp(z) = w$. Für je zwei solche Lösungen z_1 und z_2 gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $z_1 - z_2 = 2\pi ik$. (2)
Bemerkung: Für jede solche Lösung z schreibt man $z = \log(w)$ und nennt sie einen *Logarithmus* von z. Man beachte, dass dann log aber keine wohldefinierte Funktion ist; daher schränkt man sich häufig auf sogenannte *Zweige* des Logarithmus ein.

(b) Für $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, und $\alpha \in \mathbb{C}$ schreiben wir $z = w^\alpha$, wann immer $z = \exp(\alpha \log(w))$ für einen Logarithmus $\log(w)$ von w gilt. Ist $\alpha \in \mathbb{Q}$ und $\alpha = \frac{p}{q}$ eine gekürzte Darstellung, so gilt $z = w^\alpha$ für genau q verschiedene Zahlen $z \in \mathbb{C}$. Ist $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, so gilt $z = w^\alpha$ für abzählbar viele verschiedene Zahlen $z \in \mathbb{C}$. (2)

(c) Sind $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, und $n \in \mathbb{N}$ gegeben, so gibt es genau n Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^n = w$, für die man jeweils auch $z = \sqrt[n]{w}$ schreibt und die man *eine n.te Wurzel von w* nennt. Jede dieser Zahlen z ist von der Form $z = \exp(\frac{1}{n} \log(w))$ für einen Logarithmus $\log(w)$ von w. (+2)