Universität Ulm

Mittwoch, 16.06.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 20+2

Lösungen Elementare Funktionentheorie: Blatt 1

1. Bestimme Realteil, Imaginärteil und Betrag folgender komplexer Zahlen:

(a) $3+i$; (2)

Lösung: Hier und im Folgenden bezeichne stets w die komplexe Zahl in der Aufgabenstellung. $\operatorname{Re} w = 3$, $\operatorname{Im} w = 1$, $|w| = \sqrt{(\operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} w)^2} = \sqrt{10}$.

(b) $\exp(\frac{\pi i}{2})$; (2)

Lösung: Es ist

$$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ (und sogar für alle $x \in \mathbb{C}$) und somit

$$\exp(\tfrac{\pi i}{2}) = \cos(\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{\pi}{2}) = i,$$

was $\operatorname{Re} w = 0$, $\operatorname{Im} w = 1$ und $|w| = 1$ zeigt.

(c) $\frac{2+3i}{1+i}$; (2)

Lösung: Es ist

$$\frac{2+3i}{1+i} = \frac{(2+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{5+i}{2},$$

was $\operatorname{Re} w = \frac{5}{2}$, $\operatorname{Im} w = \frac{1}{2}$ und $|w| = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{26}$ zeigt.

(d) $\frac{1}{z}$ für $z = x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$; (2)

Lösung: Es ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2},$$

also $\operatorname{Re} w = \frac{x}{|z|^2}$, $\operatorname{Im} w = -\frac{y}{|z|^2}$ und $|w| = \frac{1}{|z|}$.

(e) $|\overline{z}|$ für $z = x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$. (2)

Lösung: Wegen

$$|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |z|$$

ist $\operatorname{Re} w = |z|$, $\operatorname{Im} w = 0$ und $|w| = |z|$.

2. Stelle folgende komplexe Zahlen in Polarkoordinaten dar:

(a) $1+i$; (2)

Lösung: Es ist graphisch klar, dass

$$1+i = \sqrt{2}\, \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}$$

gilt.

(b) $\exp(2+7i)$; (2)

Lösung: Offenbar ist

$$\exp(2+7i) = \mathrm{e}^2 \cdot \mathrm{e}^{7i} = \mathrm{e}^2 \cdot \mathrm{e}^{(7-2\pi)i}$$

bereits eine Darstellung in Polarkoordinaten, wobei im letzten Schritt der Winkel auf den Bereich $[0, 2\pi)$ normiert wurde, was aber nicht zwingend erforderlich ist.

(c) $-\sqrt{3}+i$. (2)

Lösung: Der Radius in der Polardarstellung ist offenbar $r=2$. Wir suchen also $\varphi \in [0,2\pi)$ mit

$$\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}.$$

Aus den Vorzeichen ist klar, dass φ im Intervall $(\frac{\pi}{2},\pi)$ liegen muss. Zudem ist

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{-1}{\sqrt{3}},$$

was nur für

$$\varphi = \arctan(\tfrac{-1}{\sqrt{3}}) + k\pi = -\frac{\pi}{6} + k\pi$$

mit $k \in \mathbb{Z}$ möglich ist, in diesem Fall also nur für $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ aufgrund von $\varphi \in (\frac{\pi}{2},\pi)$. Die Polarkoordinatendarstellung ist somit

$$-\sqrt{3}+i = 2\,\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{6}i}.$$

3. Es ist bekannt, dass die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ surjektiv, $2\pi i$-periodisch und auf dem Streifen $S := \mathbb{R} + i[0,2\pi)$ injektiv ist. Zeige:

(a) Ist $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, so gibt es unendlich viele Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $\exp(z) = w$. Für je zwei solche Lösungen z_1 und z_2 gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $z_1 - z_2 = 2\pi i k$. (2)

Bemerkung: Für jede solche Lösung z schreibt man $z = \log(w)$ und nennt sie einen *Logarithmus* von z. Man beachte, dass dann log aber keine wohldefinierte Funktion ist; daher schränkt man sich häufig auf sogenannte *Zweige* des Logarithmus ein.

Lösung: Sei $w \neq 0$. Weil $\exp\colon S \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ nach obiger Bemerkung bijektiv ist, gibt es genau ein $z \in S$ mit $\exp(z) = w$. Dann gilt aber auch $\exp(z + 2\pi i k) = w$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ wegen Periodizität; formal könnte man dies per Induktion zeigen.

Sei zuerst z eine komplexe Zahl mit $\exp(z) = 1$. Es gibt dann offenbar ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{Im} z = 2\pi k + r$ mit $r \in [0,2\pi)$; man wähle einfach k als kleinstes Ganzes der (reellen) Zahl $\frac{\operatorname{Im} z}{2\pi}$. Dann ist $z - 2\pi i k \in S$ und wegen Periodizität gilt $\exp(z - 2\pi i k) = \exp(z) = 1$. Wegen Injektivität kann man daraus $z - 2\pi i k = 0$ schlussfolgern.

Seien nun z_1 und z_2 zwei komplexe Zahlen mit $\exp(z_1) = w = \exp(z_2)$ für ein $w \neq 0$. Dann ist

$$\exp(z_1 - z_2) = \frac{\exp(z_1)}{\exp(z_2)} = \frac{w}{w} = 1,$$

was nach dem oben Gezeigten beweist, dass es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $z_1 - z_2 = 2\pi i k$ gibt. Dies war die Behauptung.

(b) Für $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, und $\alpha \in \mathbb{C}$ schreiben wir $z = w^\alpha$, wann immer $z = \exp(\alpha \log(w))$ für einen Logarithmus $\log(w)$ von w gilt. Ist $\alpha \in \mathbb{Q}$ und $\alpha = \frac{p}{q}$ eine gekürzte Darstellung, so gilt $z = w^\alpha$ für genau q verschiedene Zahlen $z \in \mathbb{C}$. Ist $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}$, so gilt $z = w^\alpha$ für abzählbar viele verschiedene Zahlen $z \in \mathbb{C}$. (2)

Lösung: Sei im Folgenden ein Logarithmus $q = \log(w)$ von w fixiert. Nach dem vorigen Aufgabenteil ist dann $\{q + 2\pi i k : k \in \mathbb{Z}\}$ die Menge aller Logarithmen von w. In der Aufgabe ist somit in anderen Worten nach der Anzahl der Elemente in der Menge

$$\bigl\{\exp(\alpha(q + 2\pi i k)) : k \in \mathbb{Z}\bigr\} = \exp(\alpha q) \cdot \bigl\{\exp(2\pi i k \alpha) : k \in \mathbb{Z}\bigr\}$$

gefragt.

Sei zuerst $\alpha = \frac{p}{q}$ eine gekürzte Darstellung und sei $k \in \mathbb{Z}$. Wir schreiben $k = aq + b$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \{0,\dots,q-1\}$. Dann gilt

$$\exp(2\pi i k \alpha) = \exp(2\pi i a) \cdot \exp(2\pi i \tfrac{bp}{q}) = \exp(2\pi i \tfrac{bp}{q}),$$

was zeigt, dass höchstens q verschiedene Elemente in der Menge liegen. Um zu zeigen, dass die Menge tatsächlich q Elemente hat, müssen wir noch zeigen, dass für b_1 und b_2 in $\{0, \ldots, q-1\}$ mit $b_1 \neq b_2$ auch tatsächlich

$$\exp(2\pi i \tfrac{b_1 p}{q}) \neq \exp(2\pi i \tfrac{b_2 p}{q})$$

gilt. Wäre diese beiden Ausdrücke aber gleich, so hätte man nach dem vorigen Aufgabenteil

$$2\pi i \tfrac{b_1 p}{q} - 2\pi i \tfrac{b_2 p}{q} = 2\pi i k$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$, also

$$kq = (b_1 - b_2)p$$

Weil q teilfremd zu p ist, wäre in diesem Fall q ein Teiler von $b_1 - b_2$. Allerdings ist zudem

$$|b_1 - b_2| \leq q - 1,$$

wie man sofort aus der Wahl von b_1 und b_2 sieht. Dies ist nur für $b_1 = b_2$ möglich, was aber ausgeschlossen war. Wir haben gezeigt, dass tatsächlich q verschiedene Werte auftreten.

Sei nun α nicht in $\mathbb{Q}$. Es genügt zu zeigen, dass dann

$$\exp(2\pi i k_1 \alpha) \neq \exp(2\pi i k_2 \alpha)$$

für alle $k_1 \neq k_2$ gilt. Wären die beiden Ausdrücke nämlich gleich, so wäre nach dem vorigen Aufgabenteil

$$2\pi i k_1 \alpha - 2\pi i k_2 \alpha = 2\pi i \ell$$

für ein $\ell \in \mathbb{Z}$, also

$$\alpha = \frac{\ell}{k_1 - k_2} \in \mathbb{Q},$$

was aber gerade ausgeschlossen wurde.

(c) Sind $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, und $n \in \mathbb{N}$ gegeben, so gibt es genau n Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^n = w$, für die man jeweils auch $z = \sqrt[n]{w}$ schreibt und die man *eine n.te Wurzel von w* nennt. Jede dieser Zahlen z ist von der Form $z = \exp(\frac{1}{n}\log(w))$ für einen Logarithmus $\log(w)$ von w. (+2)

Lösung: Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und der Definition eines Logarithmus folgt, dass für jeden Logarithmus $\log(w)$ von w mit $z := \exp(\frac{1}{n}\log(w))$ die Gleichung

$$z^n = \exp(\tfrac{n}{n}\log(w)) = \exp(\log(w)) = w$$

gilt. Nach dem vorigen Aufgabenteil erhält man auf diese Art genau n verschiedene n.te Wurzeln von w.

Folglich genügt es, wenn wir zudem noch zeigen können, dass die Gleichung $z^n = w$ höchstens n Lösungen besitzt; diese müssen dann nämlich die bereits identifizierten n Lösungen sein, was die Behauptung zeigt.

Um die Anzahl der Lösungen nach oben abzuschätzen, kann man beispielsweise mit Polynomdivision argumentieren. Alternativ dazu schreiben wir w und eine beliebige Lösung z als

$$w = r_w \exp(i\varphi_w)$$

und

$$z = r_z \exp(i\varphi_z)$$

in Polarkoordinaten mit $r_w > 0$, $r_z > 0$, $\varphi_w \in [0, 2\pi)$ und $\varphi_z \in [0, 2\pi)$. Weil die Polarkoordinatendarstellung bis auf Verschiebung des Winkels um Vielfache von 2π eindeutig ist, schlussfolgern wir aus $z^n = w$ die Gleichungen

$$r_z^n = r_w$$

und

$$n\varphi_z = \varphi_w + 2\pi i k$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$. Die erste Gleichung legt r_z eindeutig fest; dies sieht man beispielsweise an der strengen Monotonie der Funktion $r \mapsto r^n$ auf $(0, \infty)$. Aus der zweiten Gleichung ergibt sich

$$\varphi_z = \frac{\varphi_w}{n} + 2\pi i \frac{k}{n}.$$

Wie im vorigen Aufgabenteil schreiben wir $k = an+b$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \{0, \ldots, n-1\}$ und beobachten

$$\begin{aligned} z = r_z \exp(i\varphi_z) &= r_z \exp\Big(\frac{\varphi_w}{n} + 2\pi i a + 2\pi i \frac{b}{n}\Big) \\ &\in \Big\{ r_z \exp\big(\frac{\varphi_w}{n} + \frac{2\pi i \ell}{n}\big) : \ell \in \{0, \ldots, n-1\} \Big\}, \end{aligned}$$

was zeigt, dass für z höchstens n verschiedene Werte in Frage kommen.