Universität Ulm

Mittwoch, 23.06.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 20

Elementare Funktionentheorie: Blatt 2

4. Bestimme den Konvergenzradius folgender Potenzreihen; die Stirling'sche Formel darf hierbei als bekannt vorausgesetzt werden:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{n^2} z^n;$ (2)

(b) $\displaystyle\sum_{n=7}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n;$ (2)

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1+n^2} z^n;$ (2)

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-z^{5n}}{2^n};$ (2)

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}.$ (2)

5. Entscheide, in welchen Punkten ihres natürlichen Definitionsbereichs folgende Funktionen f komplex differenzierbar sind:

(a) $f(z) := \overline{z};$ (2)

(b) $f(z) := |z|^2;$ (2)

(c) $f(z) := \frac{1}{|z|}.$ (2)

6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, und sei $\Omega' := \{x + iy : (x, y) \in \Omega\}$. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, wenn $\Delta u(x, y) := u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in \Omega$ gilt. Zeige:

(a) Sei $f\colon \Omega' \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir definieren $u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + iy)$ und $v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + iy)$ für $(x, y) \in \Omega$. Sind u und v zweimal stetig differenzierbar, so sind u und v harmonisch. (2)

Bemerkung: In der Vorlesung wird noch gezeigt werden, dass eine holomorphe Funktion beliebig oft differenzierbar ist. Die Voraussetzung, dass u zweimal stetig differenzierbar ist, ist somit stets erfüllt.

(b) Sei Ω ein sternförmiges Gebiet und $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Ist u harmonisch, so gibt es eine zweimal stetig differenzierbare, harmonische Funktion $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$ eine holomorphe Funktion f auf Ω' definiert. (2)

Hinweis: Es darf benutzt werden, dass ein stetig differenzierbares Vektorfeld (p, q) auf einem sternförmigen Gebiet genau dann eine Stammfunktion φ (auch *Potential* genannt, d.h. es gilt $\nabla\varphi = (p, q)$) besitzt, wenn die *Integrabilitätsbedingung* $p_y = q_x$ erfüllt ist.

Übungsblätter sowie aktuelle Informationen unter
http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ss10/elft.html