Universität Ulm

Mittwoch, 23.06.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 20

Lösungen Elementare Funktionentheorie: Blatt 2

4. Bestimme den Konvergenzradius folgender Potenzreihen; die Stirling'sche Formel darf hierbei als bekannt vorausgesetzt werden:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{n^2} z^n$; (2)

Lösung: Wir benutzen im Folgenden die Formel

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

für den Konvergenzradius R der Potenzreihe. Da in dieser Formel die Koeffizienten (a_n) nur in einem Grenzprozess für $n \to \infty$ auftritt, spielt das Verhalten von endlich vielen Koeffizienten für den Konvergenzradius keine Rolle. Insbesondere hängt der Konvergenzradius nicht von der unteren Grenze der Summation ab.
In diesem Beispiel folgt aus $\sqrt[n]{n^2} \to 1$ $(n \to \infty)$ unmittelbar $R = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

(b) $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$; (2)

Lösung: Benutzt man die Stirling'sche Näherung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1,$$

so ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}}} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \mathrm{e}^{-1},$$

also $R = \mathrm{e}$, wobei sich die Konvergenz der auftretenden Grenzwerte ergibt, wenn man die Gleichung von rechts nach links liest.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1+n^2} z^n$; (2)

Lösung: Da $\sqrt[n]{n^k} \to 1$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ richtig ist, folgt sofort $R = 1$.

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-z^{5n}}{2^n}$; (2)

Lösung: Man beachte, dass in dieser Potenzreihe nur jeder fünfte Koeffizient nicht verschwindet. Es ist also $a_{5n} = \frac{-1}{2^n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$, und $a_k = 0$ für alle restlichen $k \in \mathbb{N}_0$. Somit ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[5n]{|a_{5n}|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{2}},$$

was auf $R = \sqrt[5]{2}$ führt.

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$. (2)

Lösung: Wir schreiben $F := \{n! : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$. Sei $q < 1$ beliebig. Ist $|z| \le q$, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z|^{n!} = \sum_{k \in F} |z|^k \le \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k \le \sum_{k=0}^{\infty} q^k < \infty,$$

was nach dem Majorantenkriterium die Konvergenz der Potenzreihe für diese Werte von z zeigt. Der Konvergenzradius der Reihe ist also mindestens 1.

Speziell für $z = 1$ konvergiert die Reihe aber offenbar nicht, da die Summanden keine Nullfolge bilden. Also ist der Konvergenzradius höchstens 1.

Insgesamt zeigt dies $R = 1$. Dies hätte man aber auch direkt mit der Formel für den Konvergenzradius sehen können; man muss nur beobachten, dass die Koeffizienten a_n beschränkt sind, aber nicht gegen 0 konvergieren, um $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ schlussfolgern zu können.

5. Entscheide, in welchen Punkten ihres natürlichen Definitionsbereichs folgende Funktionen f komplex differenzierbar sind:

(a) $f(z) := \overline{z}$; (2)

Lösung: Wir verwenden im Rest der Aufgabe stets die Tatsache, dass eine Funktion f genau dann in einem Punkt $z = x + iy$ komplex differenzierbar ist, wenn $u := \operatorname{Re} f$ und $v := \operatorname{Im} f$ die Beziehungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ in diesem Punkt erfüllen.

Speziell hier ist $u(x, y) = x$ und $v(x, y) = -y$, also $u_x \ne v_y$ für alle $x + iy \in \mathbb{C}$. Die Funktion f ist also nirgendwo komplex differenzierbar.

(b) $f(z) := |z|^2$; (2)

Lösung: Hier ist $u(x, y) = x^2 + y^2$ und $v(x, y) = 0$. Es gilt also $u_x = 2x = 0 = v_y$ und $u_y = 2y = 0 = -v_x$ genau für $x + iy = 0$. Die Funktion f ist also nur in 0 komplex differenzierbar.

(c) $f(z) := \frac{1}{|z|}$. (2)

Lösung: Nehmen wir an, die Funktion f ist in einem Punkt $z_0 \ne 0$ komplex differenzierbar. Offenbar ist $f(z_0) \ne 0$. Da die Funktion $g(w) := \frac{1}{w^2}$ nach Vorlesung auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph ist, wäre dann auch $g \circ f$ im Punkt z_0 als Komposition komplex differenzierbarer Funktionen komplex differenzierbar. Wegen $(g \circ f)(z) = |z|^2$ ist dies nach dem vorigen Aufgabenteil aber nur für $z_0 = 0$ möglich, und dieser Punkt ist nicht im Definitionsbereich. Folglich ist f in keinem Punkt seines Definitionsbereichs komplex differenzierbar.

6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, und sei $\Omega' := \{x + iy : (x, y) \in \Omega\}$. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, wenn $\Delta u(x, y) := u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in \Omega$ gilt. Zeige:

(a) Sei $f \colon \Omega' \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir definieren $u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + iy)$ und $v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + iy)$ für $(x, y) \in \Omega$. Sind u und v zweimal stetig differenzierbar, so sind u und v harmonisch. (2)

Bemerkung: In der Vorlesung wird noch gezeigt werden, dass eine holomorphe Funktion beliebig oft differenzierbar ist. Die Voraussetzung, dass u zweimal stetig differenzierbar ist, ist somit stets erfüllt.

Lösung: Ist f holomorph, so sind die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ erfüllt. Leitet man die erste Gleichung nach x und die zweite nach y ab und wendet den Satz von Schwarz über die Vertauschung von partiellen Ableitungen an, ergibt sich

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0.$$

Analog erhält man

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0,$$

was die Behauptungen zeigt.

(b) Sei Ω ein sternförmiges Gebiet und $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Ist u harmonisch, so gibt es eine zweimal stetig differenzierbare, harmonische Funktion $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $f(x+iy) := u(x,y) + iv(x,y)$ eine holomorphe Funktion f auf Ω' definiert. (2)

Hinweis: Es darf benutzt werden, dass ein stetig differenzierbares Vektorfeld (p,q) auf einem sternförmigen Gebiet genau dann eine Stammfunktion φ (auch *Potential* genannt, d.h. es gilt $\nabla\varphi = (p,q)$) besitzt, wenn die *Integrabilitätsbedingung* $p_y = q_x$ erfüllt ist.

Lösung: Das Vektorfeld $(-u_y, u_x)$ erfüllt wegen $-u_{yy} = u_{xx}$ die Integrabilitätsbedingung im Hinweis, besitzt also eine Stammfunktion v, was genau $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ bedeutet. Für dieses v erfüllt $f := u + iv$ die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, ist also holomorph. Dass v harmonisch ist, folgt nun aus dem vorigen Aufgabenteil.