UNIVERSITÄT ULM

Mittwoch, 30.06.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 20+2

Elementare Funktionentheorie: Blatt 3

7. Berechne das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ für folgende Kurven γ und Funktionen f:

(a) $\gamma(t) := \mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $f(z) := \operatorname{Re} z$; (2)

(b) $\gamma(t) := it$, $t \in [-1, 1]$, $f(z) := z^7$; (2)

(c) $\gamma(t) := \mathrm{e}^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$, $f(z) := z^m$ mit $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$; (2)

(d) $\gamma(t) := \mathrm{e}^t + i\sin(t)$, $t \in [0, 1]$, $f(z) := \frac{1}{z^2}$; (2)

(e) $\gamma(t) := t + i(1-t)$, $t \in [0, 1]$, $f(z) := \frac{1}{z}$; (2)

(f) $\gamma(t) := \mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, \varphi]$, $f(z) := \frac{1}{z}$ mit $\varphi \geq 0$ beliebig. (2)

8. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Es gelte $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \Omega$. Zeige, dass f konstant ist! (2)

9. *Hauptsatz der Algebra:* Zeige:

(a) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zu jedem $M \geq 0$ gebe es ein $R \geq 0$ mit $|f(z)| \geq M$ für alle $z \in \partial B(0, R)$. Dann besitzt f eine Nullstelle.
Tipp: Besäße f keine Nullstelle, so wäre $\frac{1}{f}$ holomorph. Verwende für diese Funktion nun die Cauchy-Integralformel mit einem beliebigen Radius. (2)

(b) Jedes nicht-konstante komplexe Polynom besitzt eine Nullstelle. (2)

10. Sei $g\colon \partial B(0,1) \to \mathbb{C}$ stetig. Zeige, dass

$$f(z) := \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

eine auf $B(0,1)$ holomorphe Funktion f definiert! (2)

Ist f im Allgemeinen auch auf $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0,1)}$ holomorph? (+2)