Universität Ulm

Mittwoch, 30.06.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 20+2

Lösungen Elementare Funktionentheorie: Blatt 3

7. Berechne das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ für folgende Kurven γ und Funktionen f:

(a) $\gamma(t) := \mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $f(z) := \operatorname{Re} z$; (2)

Lösung: Wir verwenden die Definition des Kurvenintegrals und erhalten

$$\begin{aligned}\int_\gamma f &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(t)(-\sin(t) + i\cos(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\cos^2(t)\Big|_0^{2\pi} + i\frac{\sin(t)\cos(t)+t}{2}\Big|_0^{2\pi} = i\pi.\end{aligned}$$

(b) $\gamma(t) := it$, $t \in [-1, 1]$, $f(z) := z^7$; (2)

Lösung: Die Funktion f besitzt die Stammfunktion $F(z) := \frac{z^8}{8}$. Laut Vorlesung ist also

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(1)) - F(\gamma(-1)) = \frac{i^8}{8} - \frac{(-i)^8}{8} = 0.$$

(c) $\gamma(t) := \mathrm{e}^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$, $f(z) := z^m$ mit $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$; (2)

Lösung: Die Funktion f besitzt die Stammfunktion $F(z) := \frac{z^{m+1}}{m+1}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, und γ trifft den Punkt 0 nicht. Da γ ein geschlossener Weg ist, ist nach Vorlesung also $\int_\gamma f = 0$.

(d) $\gamma(t) := \mathrm{e}^t + i\sin(t)$, $t \in [0, 1]$, $f(z) := \frac{1}{z^2}$; (2)

Lösung: Hier ist die Stammfunktion $F(z) := \frac{-1}{z}$. Also ist

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{-1}{\mathrm{e} + i\sin(1)} + 1.$$

(e) $\gamma(t) := t + i(1-t)$, $t \in [0, 1]$, $f(z) := \frac{1}{z}$; (2)

Lösung: Der Weg γ verläuft in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Dort hat f die Stammfunktion $\log(z)$, wobei wir hier den Hauptzweig wählen. Folglich ist

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \log(1) - \log(i) = -i\arg(i) = -\frac{\pi i}{2}.$$

(f) $\gamma(t) := \mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, \varphi]$, $f(z) := \frac{1}{z}$ mit $\varphi \geq 0$ beliebig. (2)

Lösung: Nach Definition ist

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^\varphi \mathrm{e}^{-it}\, i\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = i\varphi.$$

8. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Es gelte $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \Omega$. Zeige, dass f konstant ist! (2)

Lösung: Wir schreiben $f = u + iv$ mit reellwertigen Funktionen u und v. Nach Voraussetzung ist $v = 0$. Nach den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen gilt also $u_x = v_y = 0$ und $u_y = -v_x = 0$, wenn wir u und v als Funktionen in den reellen Argumenten x und y auffassen. Da Ω ein Gebiet ist, folgt aus $\nabla u = 0$, dass u konstant ist. Das ist die Behauptung.

9. *Hauptsatz der Algebra:* Zeige:

(a) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zu jedem $M \geq 0$ gebe es ein $R \geq 0$ mit $|f(z)| \geq M$ für alle $z \in \partial B(0,R)$. Dann besitzt f eine Nullstelle.
Tipp: Besäße f keine Nullstelle, so wäre $\frac{1}{f}$ holomorph. Verwende für diese Funktion nun die Cauchy-Integralformel mit einem beliebigen Radius. (2)

Lösung: Es besitze f keine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Wie im Tipp vorgeschlagen benutzen wir, dass

$$\frac{1}{f(0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,R)} \frac{\mathrm{d}z}{z f(z)}$$

für alle $R > 0$ richtig ist. Für gegebenes $M \geq 0$ erhalten also die Abschätzung

$$\frac{1}{|f(0)|} \leq \frac{2\pi R}{2\pi} \cdot \frac{1}{RM} = \frac{1}{M}$$

durch passende Wahl von R wie in der Voraussetzung. Weil dies für jedes $M \geq 0$ richtig ist, folgt hieraus

$$\frac{1}{|f(0)|} = 0,$$

ein Widerspruch.

(b) Jedes nicht-konstante komplexe Polynom besitzt eine Nullstelle. (2)

Lösung: Ist p ein Polynom vom Grad $m \geq 1$, so sieht man wie in den Grundvorlesungen im reellen Fall, dass

$$|p(z)| \geq c|z|^m$$

für ein $c > 0$ gilt. Das zeigt, dass p die Voraussetzungen des vorigen Aufgabenteils erfüllt, woraus die Behauptung folgt.

10. Sei $g\colon \partial B(0,1) \to \mathbb{C}$ stetig. Zeige, dass

$$f(z) := \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w$$

eine auf $B(0,1)$ holomorphe Funktion f definiert! (2)

Ist f im Allgemeinen auch auf $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0,1)}$ holomorph? (+2)

Lösung: Sei $|z| < 1$. Dann konvergiert die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \frac{w}{w-z}$$

gleichmäßig für $w \in \partial B(0,1)$ nach dem Weierstraß-Kriterium. Nach dem Satz über Vertauschung von Integralen und Grenzwerten folgt dann

$$\int_{\partial B(0,1)} \frac{g(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w = \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(w)}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n \mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial B(0,1)} \frac{g(w)}{w^{n+1}} \,\mathrm{d}w \; z^n, \right.$$

wobei die letzte Reihe inbesondere konvergiert. Wir haben somit gesehen, dass f eine (konvergente) Potenzreihendarstellung hat, die mindestens Konvergenzradius 1 hat. Dies zeigt die Holomorphie auf $B(0,1)$.

Sei nun $|z| > 1$. Dann ist

$$\frac{g(w)}{w-z} = \frac{-g(w)}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{w}{z}} = -\frac{g(w)}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^n.$$

Mit dem gleichen Argument wie oben zeigt man nun

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(w)}{w^{n+1}} \, \mathrm{d}w \; z^n,$$

wobei der Ausdruck hier in einer Form geschrieben wurde, die möglichst dicht an der obigen liegt. Dies zeigt, dass $z \mapsto f(1/z)$ auf $B(0,1)$ eine Potenzreihendarstellung besitzt. Da die Komposition holomorpher Funktionen wieder holomorph ist, folgt hieraus die Behauptung.

Bemerkung: In beiden Fällen kann man auch mit einem Satz über die Vertauschung von Differentiation und Integration rechtfertigen. Dieser muss dann allerdings im komplexen erst noch bewiesen werden. Der Satz über Vertauschung von Integral und gleichmäßiger Konvergenz hingegen ist eine direkte Konsequenz aus dem reellen Resultat, da Konvergenz und Integration jeweils separat für den Real- und Imaginärteil geprüft werden dürfen.