Universität Ulm
Mittwoch, 07.07.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 20+2

Elementare Funktionentheorie: Blatt 4

11. Bestimme für folgende Funktionen f die Potenzreihenentwicklung im Punkt z_0 und den zugehörigen Konvergenzradius:

(a) $f(z) = \mathrm{e}^z$, $z_0 = 1$; (2)

(b) $f(z) = \frac{1}{z}$, $z_0 = 1$; (2)

(c) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z_0 = 0$. (2)

12. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$. Zeige, dass dann auch folgende Reihen Konvergenzradius R haben:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, wobei es ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $b_n = a_n$ für alle $n \geq n_0$ gebe; (1)

(b) $\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n$, $m \in \mathbb{N}_0$; (1)

(c) $\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^{n-m}$, $m \in \mathbb{N}_0$; (1)

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n z^n$, $k \in \mathbb{N}_0$. (1)

13. Sei $\Omega \coloneqq \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z \leq 0\}$ und log der Hauptzweig des Logarithmus auf Ω, also diejenige holomorphe Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, die $\log(1) = 0$ erfüllt. Sei $z_0 \in \Omega$.

(a) Bestimme die Potenzreihendarstellung $P_{z_0}(z)$ von log zum Entwicklungspunkt z_0! (2)

(b) Bestimme den Konvergenzradius R_{z_0} von $P_{z_0}(z)$! (2)

(c) Bestimme, für welche $z_0 \in \Omega$ der Kreis $B(z_0, R_{z_0})$ in Ω enthalten ist! (2)

14. *Maximumsprinzip auf einem Streifen:* Sei $\Omega \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$. Sei $f \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ stetig und auf Ω holomorph. Es gelte $|f(iy)| \leq 1$ und $|f(1 + iy)| \leq 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Zeige:

(a) Es gelte $\lim_{\operatorname{Im} z \to \pm\infty} f(z) \to 0$, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gebe es ein $R \geq 0$ mit $|f(z)| \leq \varepsilon$ für $|\operatorname{Im} z| \geq R$. Dann gilt $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \Omega$. (2)

(b) Ist f auf $\overline{\Omega}$ beschränkt, so gilt $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \Omega$. (2)
Tipp: Betrachte $f_n(z) \coloneqq f(z)\, \mathrm{e}^{(z^2-1)/n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(c) Die Funktion $f(z) = \exp(\mathrm{e}^{\pi i (z - \frac{1}{2})})$ erfüllt die Bedingungen dieser Aufgabe, ist aber unbeschränkt auf Ω. (+2)
Bemerkung: Aus Darstellungsgründen ist hier die Exponentialfunktion einmal als $\exp(z) \coloneqq \mathrm{e}^z$ geschrieben.