Universität Ulm

Mittwoch, 14.07.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 20

Elementare Funktionentheorie: Blatt 5

15. Bestimme das maximale Gebiet, auf dem folgende formale Laurentreihen konvergieren:

(a) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{(n^2)!}$; (1)

(b) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{5\,\mathrm{e}^{|n|}}$; (1)

(c) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 2^n (z-1)^{5n}$. (2)

16. Bestimme diejenige Laurentreihendarstellung von f im Entwicklungspunkt z_0, die in einer punktierten Umgebung von z_0 konvergiert, und gib den Konvergenzbereich an:

(a) $f(z) := \dfrac{\mathrm{e}^z}{z^{17}}$, $z_0 := 0$; (1)

(b) $f(z) := \dfrac{z}{(z-1)(z-3)}$, $z_0 := 1$; (2)

(c) $f(z) := \dfrac{(\mathrm{e}^z - 1)^2}{(z-1)^2}$, $z_0 := 1$. (2)

17. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, und seien f, g und h holomorphe Funktionen auf $\Omega \setminus \{z_0\}$ mit $\operatorname{ord}(f; z_0) \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{ord}(g; z_0) \in \mathbb{Z}$ und $\operatorname{ord}(h; z_0) = -\infty$. Zeige:

(a) $\operatorname{ord}(fg; z_0) = \operatorname{ord}(f; z_0) + \operatorname{ord}(g; z_0)$; (1)

(b) $\operatorname{ord}(\frac{f}{g}; z_0) = \operatorname{ord}(f; z_0) - \operatorname{ord}(g; z_0)$; (1)

(c) $\operatorname{ord}(fh; z_0) = -\infty$; (2)

(d) $\operatorname{ord}(f + g; z_0) \geq \min\{\operatorname{ord}(f; z_0), \operatorname{ord}(g; z_0)\}$; (1)

(e) Im Allgemeinen ist $\operatorname{ord}(f + g; z_0) \neq \min\{\operatorname{ord}(f; z_0), \operatorname{ord}(g; z_0)\}$; (1)

(f) Ist $\operatorname{ord}(f; z_0) \neq \operatorname{ord}(g; z_0)$, so gilt $\operatorname{ord}(f + g; z_0) = \min\{\operatorname{ord}(f; z_0), \operatorname{ord}(g; z_0)\}$. (1)

18. Gib die Art der Singularität von f bei z_0 an und bestimme $\operatorname{ord}(f; z_0)$:

(a) $f(z) := \dfrac{1}{\sin^{13} z}$, $z_0 := 0$; (1)

(b) $f(z) := \dfrac{z^2(z-1)^2}{\mathrm{e}^{z-1} - 1}$, $z_0 := 1$; (1)

(c) $f(z) := \dfrac{z^7 + 1}{z^7} + \dfrac{\sin(z)\cos(z)}{z^6}$, $z_0 := 0$; (1)

(d) $f(z) := \sin\frac{1}{z}$, $z_0 := 0$. (1)