Universität Ulm

Mittwoch, 21.07.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 20+4

Lösungen Elementare Funktionentheorie: Blatt 6

19. Bestimme das Residuum $\operatorname{Res}_{z_0} f$ für jede isolierte Singularität z_0 der Funktion f und gib jeweils die Windungszahl $\chi(\gamma; z_0)$ an! Bestimme zudem den Wert von $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$:

(a) $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z^4 - \pi^2 z^2}$, $\gamma = \partial B_{42}(0)$; (3)

Lösung: Der Nenner von f faktorisiert zu

$$z^4 - \pi^2 z^2 = z^2(z^2 - \pi^2) = z^2(z-\pi)(z+\pi).$$

Der Nenner hat also jeweils eine einfache Nullstelle bei $z = -\pi$ und $z = \pi$ und eine doppelte Nullstelle bei $z = 0$. Da auch der Zähler einfache Nullstellen bei $z = -\pi$, $z = 0$ und $z = \pi$ hat, sind die isolierten Singularitäten bei $z = -\pi$ und $z = \pi$ hebbar, während bei $z = 0$ ein Pol erster Ordnung vorliegt.
Somit ist $\operatorname{Res}_{-\pi} f = \operatorname{Res}_\pi f = 0$ und

$$\operatorname{Res}_0 f = \lim_{z\to 0}(z f(z)) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z(z^2-\pi^2)} = -\frac{1}{\pi^2},$$

wobei wir $\frac{\sin z}{z} \to 1$ für $z \to 0$ benutzt haben.
Der Weg γ umkreist jede dieser drei Singularitäten genau einmal, und wie in der Vorlesung angegeben muss dies für die Zwecke der Übung außer nach expliziter Aufforderung nicht weiter begründet werden. Ein mögliches Argument wäre aber, dass der Mittelpunkt eines Kreises laut Vorlesung Windungszahl 1 hat und die Windungszahl auf Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}\gamma$ konstant ist.
Nach dem Residuensatz ist nun

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \chi(\gamma;-\pi)\operatorname{Res}_{-\pi} f + \chi(\gamma;0)\operatorname{Res}_0 f + \chi(\gamma;\pi)\operatorname{Res}_\pi f = -\frac{1}{\pi^2},$$

also $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -\frac{2i}{\pi}$.

(b) $f(z) = \dfrac{z^2-4z+4}{z^2+4z+4}$, $\gamma(t) = 5\cos(t) + 5i\sin(2t)$, $t \in [0, 2\pi]$; (3)

Lösung: Man kann f als

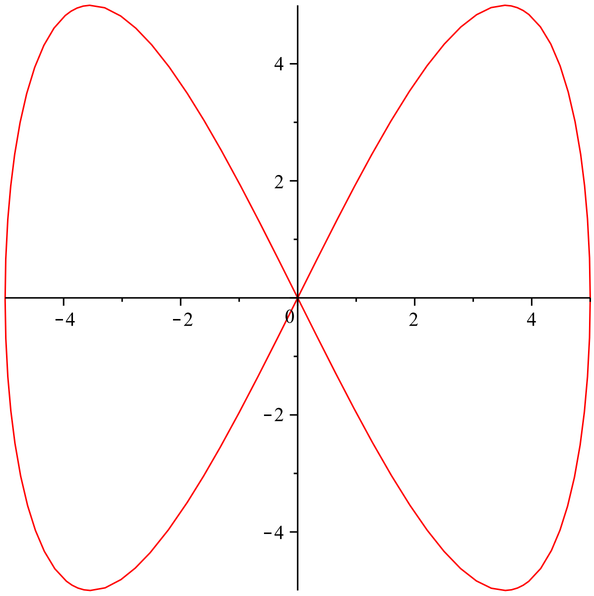
$$f(z) = \frac{(z-2)^2}{(z+2)^2}$$

schreiben. Also hat f als einzige Singularität einen Pol zweiter Ordnung bei $z = -2$. Nach der Formel in der Vorlesung ist dann

$$\operatorname{Res}_{-2} f = \lim_{z\to -2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big((z+2)^2 f(z)\Big) = \lim_{z\to -2}\Big(2(z-2)\Big) = -8.$$

Untenstehende Skizze von γ zeigt, dass der Punkt $z = -2$ einmal negativ umrundet wird. Es ist also $\chi(\gamma;-2) = -1$.
Aus dem Residuensatz folgt nun

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot (-1)\cdot(-8) = 16\pi i.$$



(c) $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$, $\gamma = \partial B_4(0)$; (3)

Lösung: Die Singularitäten sind die Punkte z der Form $z = \pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. In $z = 0$ ist dies eine hebbare Singularität, also $\operatorname{Res}_0 f = 0$, in den anderen Punkten ein Pol erster Ordnung. Zur Berechnung dieser Residuen kann man beispielsweise mit den Rechenregeln der Vorlesung für $g(z) := z$ und $f(z) := \sin(z)$

$$\operatorname{Res}_{k\pi} \frac{g}{f} = g(k\pi) \operatorname{Res}_{k\pi} \frac{1}{f} = g(k\pi) \frac{1}{f'(k\pi)} = \frac{k\pi}{\cos(k\pi)} = k\pi(-1)^k$$

schlussfolgern.

Die Windungszahlen sind $\chi(\gamma; z_0) = 1$ für $z_0 = -\pi$, $z_0 = 0$ und $z_0 = \pi$ und $\chi(\gamma; z_0) = 0$ für die anderen isolierten Singularitäten z_0.

Der Integralwert ist also

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \Big(1 \cdot -\pi(-1)^{-1} + 1 \cdot 0 + 1 \cdot \pi(-1)^1 \Big) = 2\pi i(\pi - \pi) = 0.$$

(d) $f(z) = \mathrm{e}^{1/z}$, $\gamma = \partial B_5(2 + 3i)$. (3)

Lösung: Die einzige Singularität von f ist bei $z = 0$, und diese ist eine wesentliche Singularität. Die Laurentreihenentwicklung von f um $z = 0$ ergibt sich unter Verwendung der Potenzreihenentwicklung von exp zu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^n}{|n|!}.$$

Hieraus liest man nach Definition des Residuums sofort $\operatorname{Res}_0 f = \frac{1}{1!} = 1$ ab.

Die Windungszahl von γ um $z = 0$ ist 1, da der Kreis um $2 + 3i$ mit Radius 5 wegen

$$|2 + 3i|^2 = 4 + 9 = 13 < 25 = 5^2$$

den Punkt $z = 0$ enthält.

Das Integral hat nach dem Residuensatz den Wert

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i.$$

Hinweis: Wie üblich sollen Kreislinien hier positiv (d.h. gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen werden. Die Windungszahlen müssen nicht berechnet werden, sondern dürfen aus einer Skizze abgelesen werden.

20. Berechne den Wert folgender Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6}\,\mathrm{d}x$; (3)

Lösung: Für $P(z) := 1$, $Q(z) := 1 + z^6$ und $f := \frac{P}{Q}$ ist laut Vorlesung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}_{z_k} f,$$

wobei z_k die Nullstellen von Q in der oberen Halbebene durchläuft.
Ist z eine Nullstelle von Q, so ist

$$z = \exp\Big(\frac{2\pi i k}{12}\Big) = \exp\Big(\frac{\pi i k}{6}\Big)$$

für $k \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$. Es gibt also 3 Nullstellen in der oberen Halbebene, nämlich $z_1 = \mathrm{e}^{\frac{1}{6}\pi i} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $z_2 = \mathrm{e}^{\frac{3}{6}\pi i} = i$ und $z_3 = \mathrm{e}^{\frac{5}{6}\pi i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, und diese sind einfach.
Als Residuen erhält man

$$\operatorname{Res}_{z_k} f = \operatorname{Res}_{z_k} \frac{1}{Q} = \frac{1}{Q'(z_k)} = \frac{1}{6z_k^5} = \frac{-z_k^6}{6z_k^5} = \frac{-z_k}{6}.$$

Also ergibt sich als Integralwert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6}\,\mathrm{d}x = -\frac{2\pi i}{6}\Big(z_1 + z_3 + z_5\Big) = -\frac{\pi i}{3} \cdot 2i = \frac{2}{3}\pi.$$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x$; (3)

Lösung: Wie im vorigen Aufgabenteil sind nur die Nullstellen in der oberen Halbebene von

$$Q(z) = (1+z^2)^3 = (z-i)^3(z+i)^3$$

zu untersuchen, also nur $z = i$. Dazu entwickeln wir $g(z) := \frac{1}{(z+i)^3}$ um $z_0 = i$ in eine Potenzreihe. Die allgemeine Ableitung von g ist

$$g^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n(n+2)!}{2(z+i)^{n+3}}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$, wie man leicht durch vollständige Induktion zeigt. Also ist

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+2)(n+1)}{2^{n+4}i^{n+3}}(z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)i^{n+1}}{2^{n+4}}(z-i)^n$$

und somit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)i^{n+1}}{2^{n+4}}(z-i)^{n-3},$$

woraus sich das Residuum zu

$$\operatorname{Res}_i f = \frac{4 \cdot 3 \cdot i^3}{2^6} = -\frac{3i}{16}$$

ergibt. Wie im vorigen Aufgabenteil sieht man nun

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x = \pi i \cdot \frac{-3i}{16} = \frac{3}{16}\pi,$$

wobei zusätzlich benutzt wurde, dass der Integrand eine gerade Funktion ist.

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\,\mathrm{e}^{2ix}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x;$ (3)

Lösung: Mit $P(z) \coloneqq z^3$, $Q(z) \coloneqq 1+z^4$, $\alpha \coloneqq 2$ und $f(z) \coloneqq \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{e}^{i\alpha z}$ kann man laut Vorlesung das Integral mittels

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\,\mathrm{e}^{2ix}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}_{z_k} f$$

berechnen, wobei z_k die Nullstellen von Q in der oberen Halbebene durchläuft.

Die Nullstellen von Q in der oberen Halbebene sind $z_1 = \mathrm{e}^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ und $z_2 = \mathrm{e}^{\frac{3\pi i}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, und diese sind einfach. Das Residuum in diesen Punkten ist laut Rechenregel

$$\operatorname{Res}_{z_k} f = \operatorname{Res}_{z_k} \frac{P(z)\,\mathrm{e}^{2iz}}{Q(z)} = \frac{P(z_k)\,\mathrm{e}^{2iz_k}}{Q'(z_k)} = \frac{z_k^3\,\mathrm{e}^{2iz_k}}{4z_k^3} = \frac{\mathrm{e}^{2iz_k}}{4}.$$

Somit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\,\mathrm{e}^{2ix}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi i}{4}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}i}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{2}} + \mathrm{e}^{-\sqrt{2}i}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}\right) = \pi i\,\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}).$$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$ (3)

Tipp: $\cos x = \operatorname{Re}\mathrm{e}^{ix}$

Lösung: Weil der Integrand eine gerade Funktion ist, gilt

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Mit $P(z) \coloneqq 1$, $Q(z) \coloneqq 1+z^2 = (z-i)(z+i)$, $\alpha \coloneqq 1$ und $f(z) \coloneqq \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{e}^{i\alpha z}$ ist die einzige Nullstelle von Q in der oberen Halbebene die einfache Nullstelle $z = i$, und es gilt

$$\operatorname{Res}_i f = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{Q'(i)} = \frac{-i}{2\,\mathrm{e}}.$$

Daraus ergibt sich

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(2\pi i\frac{-i}{2\,\mathrm{e}}\right) = \frac{\pi}{2\,\mathrm{e}}.$$