Universität Ulm

Dienstag, 03.08.2010, 10:00–12:00

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 100

Elementare Funktionentheorie: Klausur 1

1. Prüfen Sie, in welchen Punkten $z \in \mathbb{C}$ die Funktion

$$f(z) = \operatorname{Im}(z^2) + \overline{z}$$

komplex differenzierbar ist! (10)

2. Bestimmen Sie $\operatorname{ord}(f; z_0)$ für

$$f(z) := \frac{(\mathrm{e}^{z-1} - 1)^2 + \log(z)\cos(z-1)}{(z-1)^5 \sin(z-1)}$$

und $z_0 := 1$ und geben Sie die Art der isolierten Singularität von f bei z_0 an! (10)
Hinweis: Die Rechenregeln, die in der Übung für die Ordnung bewiesen wurden, dürfen ohne weitere Begründung verwendet werden.

3. Entwickeln Sie

$$f(z) = \frac{2z - 10}{(z-3)(z-7)}$$

um $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe und geben Sie ihren Konvergenzradius an! (10)

4. Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin^2(z)}{z^2(z^2+1)(z^2-9)}\,\mathrm{d}z$ für $\gamma(t) = 2\,\mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$! (10)

5. Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$! (10)
Hinweis: $\sin(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{3\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = -\cos(\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

6. Formulieren Sie den Identitätssatz für holomorphe Funktionen, also seine Voraussetzungen und die Schlussfolgerung, nicht aber den Beweis! (10)

7. Geben Sie einen Beweis für den Hauptsatz der Algebra! (10)

8. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet z_0 eine wesentliche Singularität einer holomorphen Funktion $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Es gelte $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktion $\frac{1}{f}$ in z_0 eine wesentliche Singularität hat! (10)

9. Entscheiden Sie (ohne Begründung), ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind, und kreuzen Sie die entsprechende Antwort im Prüfungsbogen an: (20)

(1) Ist f eine ganze Funktion mit $|f(z)| \leq \frac{1}{|z|}$ für alle $z \neq 0$, so ist $f \equiv 0$.

(2) Ist f holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, so hat die Laurentreihe von f die Form $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$ mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$, also einen trivialen Nebenteil.

(3) Die Funktion $f(z) := \sin(\frac{1}{z})$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und hat in $z = 0$ einen Pol erster Ordnung.

(4) Ist f holomorph auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ und gibt es ein $z_0 \in \Omega$ mit $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so ist $f \equiv 0$ auf Ω.

(5) Ist f eine ganze Funktion mit $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, so ist $f(z) = f(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(6) Ist $f(z) = \log(z)$ der Hauptzweig des Logarithmus auf $\Omega := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, also der Zweig mit $\log(1) = 0$, so gilt $f(ab) = f(a) + f(b)$ für alle $a, b \in \Omega$.

(7) Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ sternförmig und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, so gibt es eine holomorphe Funktion $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $g'' = f$.

(8) Ist $\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2}$ für komplexe Zahlen z_1 und z_2, so ist $\frac{z_1 - z_2}{2\pi i}$ eine ganze Zahl.

(9) Ist f eine holomorphe Funktion auf $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{5, 1-i, -6\}$, so hat der Konvergenzradius R der Potenzreihenentwicklung von f um $z_0 = -2$ die Eigenschaft $R \in \{\sqrt{10}, 4, 7, \infty\}$.

(10) Ist f eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ und gilt $\operatorname{Re} f = \operatorname{Im} f$ auf Ω, so ist f konstant.