Universität Ulm

Dienstag, 03.08.2010, 10:00–12:00

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 100

# Lösungen Elementare Funktionentheorie: Klausur 1

**1.** Prüfen Sie, in welchen Punkten $z \in \mathbb{C}$ die Funktion

$$f(z) = \operatorname{Im}(z^2) + \overline{z}$$

komplex differenzierbar ist! (10)

**Lösung:** Wir scheiben $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit

$$u(x, y) = \operatorname{Im}\big((x + iy)^2\big) + x = 2xy + x$$

und $v(x, y) = -y$. Dann sind $u$ und $v$ reell stetig differenzierbar. Nach den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen ist $f$ genau dann in $z = x + iy$ komplex differenzierbar, wenn dort

$$2y + 1 = u_x(x, y) = v_y(x, y) = -1$$

und

$$2x = u_y(x, y) = -v_x(x, y) = 0$$

gilt, also genau für $(x, y) = (0, -1)$. Somit ist $f$ genau in $z = -i$ komplex differenzierbar.

**2.** Bestimmen Sie $\operatorname{ord}(f; z_0)$ für

$$f(z) := \frac{(\mathrm{e}^{z-1} - 1)^2 + \log(z)\cos(z - 1)}{(z - 1)^5 \sin(z - 1)}$$

und $z_0 := 1$ und geben Sie die Art der isolierten Singularität von $f$ bei $z_0$ an! (10)
**Hinweis:** Die Rechenregeln, die in der Übung für die Ordnung bewiesen wurden, dürfen ohne weitere Begründung verwendet werden.

**Lösung:** Es ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{ord}(\mathrm{e}^{z-1} - 1; 1) &= 1, \\
\operatorname{ord}(\cos(z - 1); 1) &= 0, \\
\operatorname{ord}(\log(z); 1) &= 1, \\
\operatorname{ord}(z - 1; 1) &= 1 \text{ und} \\
\operatorname{ord}(\sin(z - 1); 1) &= 1,
\end{aligned}$$

denn alle diese Funktionen sind holomorph in $z = 1$, und mit Ausnahme von $\cos(z - 1)$ haben diese Funktionen eine Nullstelle bei $z = 1$ mit nicht verschwindender Ableitung. Nach den Rechenregeln für die Ordnung von Summen, Produkten und Quotienten hat der Nenner eine Nullstelle erster Ordnung in $z = 1$ und es gilt $\operatorname{ord}(f; z_0) = -5$. Also hat $f$ einen Pol (genauer: einen Pol fünfter Ordnung) bei $z = 1$.

**3.** Entwickeln Sie

$$f(z) = \frac{2z - 10}{(z - 3)(z - 7)}$$

um $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe und geben Sie ihren Konvergenzradius an! (10)

**Lösung:** Wir zerlegen $f$ in Partialbrüche, also

$$f(z) = \frac{a}{z-3} + \frac{b}{z-7},$$

mit $a = 1$ und $b = 1$. Wie in der Übung schreiben wir die beiden Summanden als Potenzreihe mittels

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}$$

und

$$\frac{1}{z-7} = -\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{7^n}.$$

Insgesamt haben wir also

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} -\Big(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{7^{n+1}}\Big) z^n.$$

Die Potenzreihe konvergiert genau auf der größten Kreisscheibe um $z = 0$, auf die $f$ holomorph fortgesetzt werden kann, also auf $B_3(0)$. Der Konvergenzradius ist somit $R = 3$.

**4.** Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin^2(z)}{z^2(z^2+1)(z^2-9)}\,\mathrm{d}z$ für $\gamma(t) = 2\,\mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$! (10)

**Lösung:** Die Funktion

$$f(z) := \frac{\sin^2(z)}{z^2(z^2+1)(z^2-9)}$$

ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0, i, -i, 3, -3\}$ und hat in $z = 0$ eine hebbare Singularität, also $\operatorname{Res}_0 f = 0$, während die übrigen isolierten Singularitäten Pole erster Ordnung sind. Nach den Formeln aus der Vorlesung ist

$$\operatorname{Res}_{\pm i} f = \frac{g(\pm i)}{h'(\pm i)}$$

mit $g(z) := \frac{\sin^2(z)}{z^2(z^2-9)}$ und $h(z) := z^2 + 1$. Wegen $g(\pm i) = \frac{\sin^2(\pm i)}{10} = \frac{\sin^2(i)}{10}$ ist

$$\operatorname{Res}_i f = \frac{\sin^2(i)}{20i} = -\operatorname{Res}_{-i} f.$$

Die Punkte $0$, $-i$ und $i$ werden von $\gamma$ genau einmal umkreist, die Punkte $-3$ und $3$ werden nicht umkreist. Nach dem Residuensatz ist also

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\Big(\operatorname{Res}_0 f + \operatorname{Res}_i f + \operatorname{Res}_{-i} f\Big) = 0$$

**5.** Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$! (10)

**Hinweis:** $\sin(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{3\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = -\cos(\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

**Lösung:** Setze $P(z) := 1 + z^2$, $Q(z) := 1 + z^4$ und $f := \frac{P}{Q}$. Dann ist $\deg Q \geq \deg P + 2$ und $Q$ hat keine reellen Nullstellen, und genauer hat $Q$ die Nullstellen $\mathrm{e}^{\frac{k\pi i}{4}}$ mit $k \in \{1, 3, 5, 7\}$, wovon nur

$$z_1 := \mathrm{e}^{\frac{\pi i}{4}} = \cos(\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

und

$$z_2 := \mathrm{e}^{\frac{3\pi i}{4}} = \cos(\tfrac{3\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

in der oberen Halbebene liegen. Zudem ist laut Vorlesung und wegen $z_k^4 = -1$

$$\operatorname{Res}_{z_k} f = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} = \frac{1+z_k^2}{4z_k^3} = -\frac{z_k + z_k^3}{4} = -\frac{z_1 + z_2}{4}.$$

Nach Vorlesung folgt dann

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \pi i\Big(\operatorname{Res}_{z_1} f + \operatorname{Res}_{z_2} f\Big)\\ &= -\frac{\pi i}{2}(z_1+z_2) = -\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{2i}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

**6.** Formulieren Sie den Identitätssatz für holomorphe Funktionen, also seine Voraussetzungen und die Schlussfolgerung, nicht aber den Beweis! (10)

**Lösung:** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f$ und $g$ holomorphe Funktionen auf $\Omega$. Es gebe $z_0 \in \Omega$ und $z_k \in \Omega$, $z_k \neq z_0$, mit $\lim_{k\to\infty} z_k = z_0$, für die $f(z_k) = g(z_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist $f(z) = g(z)$ für alle $z \in \Omega$.

**7.** Geben Sie einen Beweis für den Hauptsatz der Algebra! (10)

**Lösung:** Hierfür wurden im Laufe der Veranstaltung mehrere Beweise vorgestellt. Ein typischer ist der folgende: Angenommen, es gibt ein nicht-konstantes Polynom $p$ ohne Nullstelle. Wegen $|p(z)| \to \infty$ für $z \to \infty$ gibt es dann ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $|p(z)| \geq \varepsilon_0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist $f(z) := \frac{1}{p(z)}$ holomorph mit $|f(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon_0}$, also eine beschränkte ganze Funktion. Nach dem Satz von Liouville muss $f$ konstant sein. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $p$ nicht konstant ist, womit die Aussage bewiesen ist.

**8.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet $z_0$ eine wesentliche Singularität einer holomorphen Funktion $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Es gelte $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktion $\frac{1}{f}$ in $z_0$ eine wesentliche Singularität hat! (10)

**Lösung:** Natürlich ist $z_0$ eine isolierte Singularität von $\frac{1}{f}$. Wäre die Singularität $z_0$ von $\frac{1}{f}$ hebbar oder ein Pol, also $\operatorname{ord}(\frac{1}{f}; z_0) \in \mathbb{Z}$, so wäre nach den Rechenregeln in der Übung

$$\operatorname{ord}(f; z_0) = -\operatorname{ord}(\frac{1}{f}; z_0) \in \mathbb{Z},$$

also die Singularität $z_0$ von $f$ hebbar oder ein Pol im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $z_0$ eine wesentliche Singularität von $\frac{1}{f}$.

**9.** Entscheiden Sie (ohne Begründung), ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind, und kreuzen Sie die entsprechende Antwort im Prüfungsbogen an: (20)

(1) Ist $f$ eine ganze Funktion mit $|f(z)| \leq \frac{1}{|z|}$ für alle $z \neq 0$, so ist $f \equiv 0$.

**Lösung: Richtig:** Die Funktion ist sicherlich beschränkt auf $B_2(0)$, und die Voraussetzung liefert $|f(z)| \leq 1$ für $z \in \mathbb{C} \setminus B_1(0)$. Also ist $f$ auf $\mathbb{C}$ beschränkt und somit nach dem Satz von Liouville konstant. Die Voraussetzung lässt dann nur noch die Konstante $f \equiv 0$ als Wert von $f$ zu.

(2) Ist $f$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, so hat die Laurentreihe von $f$ die Form $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$, also einen trivialen Nebenteil.

**Lösung: Falsch:** Ein Gegenbeispiel ist jede ganze Funktion $f$ mit $f \not\equiv 0$, beispielsweise $f \equiv 1$.

(3) Die Funktion $f(z) := \sin(\frac{1}{z})$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und hat in $z = 0$ einen Pol erster Ordnung.

**Lösung: Falsch:** Zwar ist $f$ tatsächlich auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Allerdings ist $z = 0$ eine wesentliche Singularität von $f$, wie man sofort an der Laurentreihenentwicklung ablesen kann.

(4) Ist $f$ holomorph auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ und gibt es ein $z_0 \in \Omega$ mit $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so ist $f \equiv 0$ auf $\Omega$.

**Lösung: Richtig:** Laut Vorlesung hat $f$ eine Potenzreihendarstellung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ auf einer Umgebung von $z_0$ mit $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = 0$. Also ist $f \equiv 0$ auf einer Umgebung von $z_0$ und daher nach dem Identitätssatz $f \equiv 0$ auf $\Omega$.

(5) Ist $f$ eine ganze Funktion mit $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, so ist $f(z) = f(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

**Lösung: Richtig:** Nach Voraussetzung verschwindet $g(z) := f(z) - f(-z)$ auf $\mathbb{R}$, also auf einer Menge mit Häufungspunkt. Nach dem Identitätssatz ist dann $g \equiv 0$, was gerade die Behauptung ist.

(6) Ist $f(z) = \log(z)$ der Hauptzweig des Logarithmus auf $\Omega := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, also der Zweig mit $\log(1) = 0$, so gilt $f(ab) = f(a) + f(b)$ für alle $a, b \in \Omega$.

**Lösung: Falsch:** Betrachte $a := b := \mathrm{e}^{\frac{3\pi i}{4}}$. Dann ist $\log(a) = \log(b) = \frac{3\pi i}{4}$, aber $\log(ab) = \log \mathrm{e}^{\frac{6\pi i}{4}} = \log \mathrm{e}^{\frac{-2\pi i}{4}} = -\frac{\pi i}{2} \neq 2 \cdot \frac{3\pi i}{4}$, weil beim Hauptzweig das Argument immer in $(-\pi, \pi)$ gemessen wird.

(7) Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ sternförmig und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, so gibt es eine holomorphe Funktion $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $g'' = f$.

**Lösung: Richtig:** Laut Vorlesung sind sternförmige Gebiete Elementargebiete. Also gibt es $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$ und dann auch $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $g' = F$. Insgesamt ist $g'' = f$.

(8) Ist $\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2}$ für komplexe Zahlen $z_1$ und $z_2$, so ist $\frac{z_1 - z_2}{2\pi i}$ eine ganze Zahl.

**Lösung: Richtig:** Dies folgt aus der Tatsache, dass die Exponentialfunktion $2\pi i$-periodisch und auf dem Streifen $\mathbb{R} \times [0, 2\pi i)$ injektiv ist.

(9) Ist $f$ eine holomorphe Funktion auf $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{5, 1-i, -6\}$, so hat der Konvergenzradius $R$ der Potenzreihenentwicklung von $f$ um $z_0 = -2$ die Eigenschaft $R \in \{\sqrt{10}, 4, 7, \infty\}$.

**Lösung: Richtig:** Der Konvergenzradius ist der Radius der größten Kreisscheibe um $z_0$, auf die $f$ holomorph fortgesetzt werden kann. Die Fortsetzbarkeit kann nur in den Singularitäten scheitern: Der Konvergenzradius ist $R = \sqrt{10}$, falls $1 - i$ nicht hebbar ist. Anderenfalls ist $R \geq 4$ und man kann ähnliche Aussagen bezüglich der anderen beiden Singularitäten treffen. Sind beispielsweise alle drei Singularitäten hebbar, so ist $R = \infty$.

(10) Ist $f$ eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ und gilt $\operatorname{Re} f = \operatorname{Im} f$ auf $\Omega$, so ist $f$ konstant.

**Lösung: Richtig:** Da die Menge $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$ keine inneren Punkte hat, kann $f(\Omega)$ für eine Funktion $f$ mit $\operatorname{Re} f = \operatorname{Im} f$ keine offene Menge sein. Nach dem Satz über die Gebietstreue ist dies nur für konstante Funktionen möglich.

Alternativ hierzu kann man mit den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen argumentieren: Schreibt man $u := \operatorname{Re} f$ und $v := \operatorname{Im} f$, so gilt $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$. Wegen $u = v$ ist dann

$$u_x = v_y = u_y = -v_x = -u_x,$$

woraus $u_x = 0$ folgt, also auch $u_y = v_x = v_y = 0$. Weil $\Omega$ zusammenhängend ist, erhält man hieraus, dass $u$ und $v$ konstant sind, dass also $f$ konstant ist.