Universität Ulm

Freitag, 08.10.2010, 10:00–12:00

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka

Sommersemester 2010

Punktzahl: 60

Elementare Funktionentheorie: Klausur 2

1. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion

$$f(z) = \frac{z^2(z^2-\pi^2)^4}{\sin(z)^2(z^2+\pi^2)^4}$$

und untersuchen Sie den Typ ihrer isolierten Singularitäten, bei hebbaren Singularitäten und Polstellen inklusive Bestimmung der Ordnung! (10)

2. Bestimmen Sie die Anzahl der Laurentreihendarstellungen der Funktion

$$f(z) \coloneqq \frac{z-2}{z^2(1-z)}$$

zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$, geben Sie diese an, und bestimmen Sie jeweils deren Konvergenzgebiet! (10)

3. Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} \sin(2x)\,\mathrm{d}x$! (10)

4. Formulieren und beweisen Sie den Riemann'schen Hebbarkeitssatz! (10)

5. Sei f eine nicht-konstante ganze Funktion. Zeigen Sie, dass das Bild von f in $\mathbb{C}$ dicht liegt! (10)
Tipp: Man kann ähnlich wie beim Satz von Weierstraß-Casorati argumentieren.

6. Entscheiden Sie (ohne Begründung), ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind, und kreuzen Sie die entsprechende Antwort im Prüfungsbogen an: (10)

(1) Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ sternförmig, $z_0 \notin \Omega$ und γ ein geschlossener Weg in Ω, so gilt für die Windungszahl $\chi(\gamma; z_0)$ von γ um z_0 die Gleichung $\chi(\gamma; z_0) = 0$.

(2) Sei $\Omega \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann nimmt die Funktion f ihr Maximum auf dem Rand von Ω an in dem Sinne, dass $\sup_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| = \sup_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$ gilt, wobei auf beiden Seiten auch der Wert ∞ zugelassen ist.

(3) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Die Funktion f besitze eine Stammfunktion F auf Ω. Sei γ ein geschlossener Weg in Ω. Dann ist $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

(4) Seien f und g ganze Funktionen. Es gebe eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ mit unendlich vielen Elementen, für die $f(z) = g(z)$ für alle $z \in A$ gilt. Dann ist $f(z) = g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(5) Ist $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, $z = 0$ eine wesentliche Singularität von f und $\int_{\partial B_1(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, so ist $\operatorname{Res}_0(f) = 0$.