Universität Ulm

Mittwoch, 28.04.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 20

# Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 1

Bitte im SLC für die Vorlesung anmelden!
Anderenfalls können für die Übungsblätter keine Punkte vergeben werden.

**1.** Bestimme (möglichst alle) Lösungen folgender Anfangswertprobleme auf größtmöglichen Lösungsintervallen:

(a) $y'(t) = \mathrm{e}^t y(t)$, $y(0) = 1$; (2)

(b) $y'(t) = (1+t)(1+y(t))$, $y(1) = 0$; (2)

(c) $(1+t^2)y''(t) = 1 - 2ty'(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$; (2)
**Tipp:** Betrachte $z(t) \coloneqq y'(t)$.

(d) $t^2 y'(t) + t y(t) = 1$, $y(-1) = -7$; (2)

(e) $y'(t) = \mathrm{e}^{y(t)} \sin(t)$, $y(0) = -\log c$ für festes $c > 0$. (2)

**2.** Seien $a$ und $f$ stetige Funktionen von $[0, \infty)$ nach $\mathbb{R}$. Es gebe $\alpha > 0$ mit $a(t) \geq \alpha$ für alle $t \geq 0$, und es gelte $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. Zeige, dass dann jede Lösung $y$ von

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

für $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert! (3)

**3.** Sei $f\colon (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft (partiell) stetig differenzierbar, d.h. $f \in \mathrm{C}^\infty((a,b) \times \mathbb{R})$, und sei $y\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine (stetig differenzierbare) Lösung von $y'(t) = f(t, y(t))$. Zeige, dass $y \in \mathrm{C}^\infty(a,b)$ ist! (2)

**4.** Wir betrachten eine idealisierte Versuchsanordnung bestehend aus zwei Wassertanks. Der erste enthält 500 Volumeneinheiten Wasser (WE), in dem zum Startzeitpunkt 2 Masseeinheiten Salz (SE) gelöst sind, beim zweiten sind es 200 WE und 10 SE. Es wird kontinuierlich Wasser zwischen den Tanks hin- und hergepumpt, wobei pro Zeiteinheit (ZE) jeweils 20 WE vom ersten in den zweiten und vom zweiten in den ersten fließen. Das Volumen in den Tanks bleibt also konstant.
**Hinweis:** Es darf angenommen werden, dass die Salzmenge so gering ist, dass man chemische Effekte vernachlässigen kann. Es soll also beispielsweise der Dichteunterschied bei unterschiedlichen Salzkonzentrationen ignoriert werden. Zudem sollen die Inhalte der Tanks stets als homogen angenommen werden: Der Inhalt der Tanks wird "unendlich schnell" vermischt.
**Bemerkung:** Die umständliche Formulierung in Einheiten wurde gewählt, um dimensionslos rechnen zu dürfen.

(a) Stelle ein Differentialgleichungssystem auf, das die zeitliche Entwicklung des Systems beschreibt, und bestimme Anfangsbedingungen für dieses System! (1)
**Hinweis:** Bezeichne mit $s_1(t)$ und $s_2(t)$ die Salzmenge im ersten bzw. zweiten Tank nach $t$ ZE.

(b) Wieviele SE sind nach 2 ZE im ersten Tank, wieviele im zweiten? (2)
**Hinweis:** Das Ergebnis ist auf 2 Nachkommastellen gerundet anzugeben.

**Tipp:** Setze $d(t) := 2s_1(t) - 5s_2(t)$ und leite aus dem im ersten Aufgabenteil erhaltenen Differentialgleichungssystem eine Differentialgleichung für $d$ her. Zeige zudem, dass die Gesamtsalzmenge $s_1 + s_2$ konstant ist.

(c) Zeige, dass sich in dem durch das Differentialgleichungssystem beschriebenen Modell auf lange Sicht näherungsweise ein Gleichgewicht einstellt und bestimme dieses! (1)

(d) Nach wie vielen ZE ist die Abweichung vom Gleichgewichtszustand in beiden Tanks geringer als $10^{-1}$ SE? Nach wie vielen geringer als $10^{-5}$ SE? (1)