UNIVERSITÄT ULM
Mittwoch, 28.04.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 20

Lösungen Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 1

Bitte im SLC für die Vorlesung anmelden!
Anderenfalls können für die Übungsblätter keine Punkte vergeben werden.

1. Bestimme (möglichst alle) Lösungen folgender Anfangswertprobleme auf größtmöglichen Lösungsintervallen:

(a) $y'(t) = \mathrm{e}^t y(t)$, $y(0) = 1$; (2)

Lösung: Laut Skript ist die eindeutige Lösung durch

$$y(t) = y(0)\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{e}^s \,\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^t - 1}$$

gegeben, und die Lösung ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

(b) $y'(t) = (1+t)(1+y(t))$, $y(1) = 0$; (2)

Lösung: Wegen $y(1) \neq -1$ kann man die Gleichung zumindest lokal zu

$$\frac{y'(t)}{1+y(t)} = 1 + t$$

umformen. Integration liefert dann

$$\log(1+y(t)) - \log(1+y(1)) = \int_1^t (1+s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}t^2 + t - \frac{3}{2},$$

also

$$y(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(t^2+2t-3)} - 1.$$

Diese Funktion löst tatsächlich die Differentialgleichung und ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Laut Skript ist die Lösung eindeutig auf dem größten Intervall, auf dem $1 + y(t)$ für die gefundene Lösung keine Nullstelle hat, also ebenfalls auf ganz $\mathbb{R}$. Somit ist diese Funktion die einzige Lösung.

(c) $(1+t^2)y''(t) = 1 - 2ty'(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$; (2)
Tipp: Betrachte $z(t) \coloneqq y'(t)$.

Lösung: Definiere $z(t) \coloneqq y'(t)$. Dann ist $z'(t) = -\frac{2t}{1+t^2}z(t) + \frac{1}{1+t^2}$ und $z(0) = 0$. Es ist

$$A(t) \coloneqq \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s = -\log(1+s^2)\Big|_0^t = -\log(1+t^2).$$

Nach der Lösungsformel im Skript ist also

$$z(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\Big(\int_0^t \frac{\mathrm{e}^{-A(s)}}{1+s^2}\,\mathrm{d}s\Big) = \frac{t}{1+t^2}$$

die eindeutige Lösung der Gleichung für z. Daraus folgt

$$y(t) = y(0) + \int_0^t y'(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t z(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\log(1+t^2).$$

Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Man rechnet leicht nach, dass sie die Gleichung löst. Nach Herleitung ist sie die einzige Lösung.

(d) $t^2y'(t) + ty(t) = 1$, $y(-1) = -7$; (2)

Lösung: Für $t = 0$ kann die Gleichung nicht erfüllt werden. Es kann also keine Lösung auf einem Intervall geben, das die 0 enthält; das maximal denkbare Lösungsintervall ist somit $(-\infty, 0)$. Wir können nun stets $t < 0$ annehmen.

Dann lässt sich die Differentialgleichung zu $y'(t) = -\frac{y(t)}{t} + \frac{1}{t^2}$ umschreiben. Man kann nun entweder die Lösungsformel der Vorlesung verwenden oder die Herleitung reproduzieren, wobei hier letzteres durchgeführt wird. Da $t \mapsto \frac{1}{t}$ eine Lösung der homogenen Gleichung ist, ist es naheliegend, die Funktion $z(t) \coloneqq ty(t)$ zu betrachten. Dann gilt

$$z'(t) = ty'(t) + y(t) = \frac{1}{t},$$

also $z(t) = \log(-t) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Somit ist $y(t) = \frac{\log(-t)+c}{t}$. Die Anfangsbedingung $y(-1) = -7$ impliziert $c = 7$, und man rechnet leicht nach, dass

$$y(t) = \frac{\log(-t) + 7}{t}$$

eine Lösung auf dem maximalen Lösungsintervall $(-\infty, 0)$ ist. Die Herleitung zeigt zudem, dass dies die einzige Lösung ist.

(e) $y'(t) = \mathrm{e}^{y(t)} \sin(t)$, $y(0) = -\log c$ für festes $c > 0$. (2)

Lösung: Ist y eine Lösung, so gilt

$$c - \mathrm{e}^{-y(t)} = -\mathrm{e}^{-y(t)} + \mathrm{e}^{-y(0)} = \int_0^t \mathrm{e}^{-y(s)} y'(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \sin(s)\,\mathrm{d}s = -\cos(t) + 1.$$

Also ist

$$y(t) = -\log(\cos(t) + c - 1).$$

Ist nun $c > 2$, so ist die Funktion eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung der Gleichung. Ist hingegen $0 < c < 2$, so ist die Funktion nur für $|t| \le T \coloneqq \arccos(1 - c) \in (0, \pi)$ definiert und löst dort die Gleichung, kann aber in den beiden Randpunkten nicht stetig fortgesetzt werden. Also ist in diesem Fall $(-T, T)$ das maximale Lösungsintervall. Zudem ist diese Funktion nach Herleitung die einzige Lösung des Anfangswertproblems.

2. Seien a und f stetige Funktionen von $[0, \infty)$ nach $\mathbb{R}$. Es gebe $\alpha > 0$ mit $a(t) \ge \alpha$ für alle $t \ge 0$, und es gelte $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. Zeige, dass dann jede Lösung y von

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

für $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert! (3)

Lösung: Sei $A(t) \coloneqq \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s$. Laut Vorlesung ist dann

$$y(t) = \mathrm{e}^{-A(t)}\Big(\int_0^t f(s)\mathrm{e}^{A(s)}\,\mathrm{d}s + c\Big) = \int_0^t f(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t a(r)\,\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}s + c\mathrm{e}^{-\int_0^t a(r)\,\mathrm{d}r}$$

mit $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Gleichung. Wegen $a(t) \ge \alpha$ ergibt sich

$$|y(t)| \le \int_0^t |f(s)|\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\,\mathrm{d}s + |c|\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

Zudem gibt es $M \ge 0$ mit $|f(s)| \le M$ für alle $s \ge 0$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und $t_0 \ge 0$ so groß, dass $|f(s)| \le \varepsilon$ für alle $s \ge t_0$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_0^t |f(s)|\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\,\mathrm{d}s &\le M\int_0^{t_0} \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\,\mathrm{d}s + \varepsilon\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)} \\ &= \frac{M}{\alpha}\Big(\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)} - \mathrm{e}^{-\alpha t}\Big) + \frac{\varepsilon}{\alpha}\Big(1 - \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\Big)\end{aligned}$$

und somit

$$0 \leq \limsup_{t\to\infty} |y(t)| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt hieraus die Behauptung.

3. Sei $f\colon (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft (partiell) stetig differenzierbar, d.h. $f \in \mathrm{C}^\infty((a,b)\times\mathbb{R})$, und sei $y\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine (stetig differenzierbare) Lösung von $y'(t) = f(t, y(t))$. Zeige, dass $y \in \mathrm{C}^\infty(a,b)$ ist! (2)

Lösung: Wir zeigen per Induktion $y \in \mathrm{C}^n(a,b)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, woraus die Behauptung folgt. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei die Behauptung also für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig und sei y eine Lösung von $y'(t) = f(t, y(t))$. Dann ist $y \in \mathrm{C}^n(a,b)$ und somit die Funktion $t \mapsto f(t, y(t))$ in $\mathrm{C}^n(a,b)$ als Verkettung von C^n-Funktionen. Also ist $y' \in \mathrm{C}^n(a,b)$, was $y \in \mathrm{C}^{n+1}(a,b)$ bedeutet.

4. Wir betrachten eine idealisierte Versuchsanordnung bestehend aus zwei Wassertanks. Der erste enthält 500 Volumeneinheiten Wasser (WE), in dem zum Startzeitpunkt 2 Masseeinheiten Salz (SE) gelöst sind, beim zweiten sind es 200 WE und 10 SE. Es wird kontinuierlich Wasser zwischen den Tanks hin- und hergepumpt, wobei pro Zeiteinheit (ZE) jeweils 20 WE vom ersten in den zweiten und vom zweiten in den ersten fließen. Das Volumen in den Tanks bleibt also konstant.
Hinweis: Es darf angenommen werden, dass die Salzmenge so gering ist, dass man chemische Effekte vernachlässigen kann. Es soll also beispielsweise der Dichteunterschied bei unterschiedlichen Salzkonzentrationen ignoriert werden. Zudem sollen die Inhalte der Tanks stets als homogen angenommen werden: Der Inhalt der Tanks wird "unendlich schnell" vermischt.
Bemerkung: Die umständliche Formulierung in Einheiten wurde gewählt, um dimensionslos rechnen zu dürfen.

(a) Stelle ein Differentialgleichungssystem auf, das die zeitliche Entwicklung des Systems beschreibt, und bestimme Anfangsbedingungen für dieses System! (1)
Hinweis: Bezeichne mit $s_1(t)$ und $s_2(t)$ die Salzmenge im ersten bzw. zweiten Tank nach t ZE.

Lösung: In einem infinitesimal kleinen Zeitschritt Δt werden $\frac{20}{500}\Delta t$ WE abgepumpt. Da insgesamt $s_1(t)$ SE gelöst sind, ergibt sich ein Salzverlust von $\frac{20}{500}s_1(t)\Delta t$. Gleichzeitig werden aber $\frac{20}{200}\Delta t$ WE vom zweiten Tank zugeführt, was einen Salzgewinn von $\frac{20}{200}s_2(t)\Delta t$ zur Folge hat. Somit gilt (näherungsweise für sehr kleine Δt)

$$s_1(t+\Delta t) - s_1(t) = -\frac{1}{25}s_1(t)\Delta t + \frac{1}{10}s_2(t)\Delta t.$$

Teilt man durch Δt und betrachtet den Grenzwert $\Delta t \to 0$, so ergibt sich

$$s_1'(t) = -\frac{1}{25}s_1(t) + \frac{1}{10}s_2(t).$$

Für die Funktion s_2 kann man entweder analog argumentieren oder man beobachtet, dass wegen Mengenerhalt $s_2' = -s_1'$ gelten muss. Man kommt also auf das System

$$\begin{aligned} s_1'(t) &= -\frac{1}{25}s_1(t) + \frac{1}{10}s_2(t) \\ s_2'(t) &= +\frac{1}{25}s_1(t) - \frac{1}{10}s_2(t). \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $s_1(0) = 2$ und $s_2(0) = 10$.

(b) Wieviele SE sind nach 2 ZE im ersten Tank, wieviele im zweiten? (2)
Hinweis: Das Ergebnis ist auf 2 Nachkommastellen gerundet anzugeben.
Tipp: Setze $d(t) := 2s_1(t) - 5s_2(t)$ und leite aus dem im ersten Aufgabenteil erhaltenen Differentialgleichungssystem eine Differentialgleichung für d her. Zeige zudem, dass die Gesamtsalzmenge $s_1 + s_2$ konstant ist.

Lösung: Mit $d(t) := 2s_1(t) - 5s_2(t)$ gilt

$$\begin{aligned} d'(t) = 2s_1'(t) - 5s_2'(t) &= \Big(\frac{-2}{25} + \frac{-5}{25}\Big)s_1(t) + \Big(\frac{2}{10} + \frac{5}{10}\Big)s_2(t) \\ &= -\frac{7}{50}\Big(2s_1(t) - 5s_2(t)\Big) = -\frac{7}{50}d(t). \end{aligned}$$

und $d(0) = 2s_1(0) - 5s_2(0) = -46$. Laut Vorlesung ist dann

$$2s_1(t) - 5s_2(t) = d(t) = -46\mathrm{e}^{-\frac{7}{50}t}$$

für alle $t \geq 0$.
Beachte nun, dass zudem $s_1'(t) + s_2'(t) = 0$ gilt, also $s_1 + s_2$ konstant ist (was man nach Modellbildung schon vermutet). Somit ist $s_1(t) + s_2(t) = 12$ für alle $t \geq 0$. Addiert man das fünffache dieser Gleichung zu d und teilt durch 7, so erhält man

$$s_1(t) = \frac{60}{7} - \frac{46}{7}\mathrm{e}^{-\frac{7}{50}t}$$

und analog

$$s_2(t) = \frac{24}{7} + \frac{46}{7}\mathrm{e}^{-\frac{7}{50}t}.$$

Dies ergibt $s_1(2) \approx 3.60$ und $s_2(2) \approx 8.40$.

(c) Zeige, dass sich in dem durch das Differentialgleichungssystem beschriebenen Modell auf lange Sicht näherungsweise ein Gleichgewicht einstellt und bestimme dieses! (1)

Lösung: Wir haben in der Lösung des vorigen Aufgabenteils schon eine explizite Formel für s_1 und s_2 hergeleitet. Aus dieser erhält man sofort $s_1(t) \to \frac{60}{7}$ und $s_2(t) \to \frac{24}{7}$ für $t \to \infty$, was die Frage beantwortet.
Bemerkung: Dieses Ergebnis ist nicht überraschend; im Gleichgewichtszustand sollte das Verhältnis der Salzmengen in den beiden Tanks dem Verhältnis der Wassermengen entsprechen, sodass in beiden Tanks die gleiche Konzentration vorliegt. Diese Überlegung stellt aber keinen Beweis dar!

(d) Nach wie vielen ZE ist die Abweichung vom Gleichgewichtszustand in beiden Tanks geringer als 10^{-1} SE? Nach wie vielen geringer als 10^{-5} SE? (1)

Lösung: Die Abweichung vom Gleichgewichtszustand ist in beiden Tanks durch die Fehlerfunktion $E(t) = \frac{46}{7}\mathrm{e}^{-\frac{7}{50}t}$ gegeben. Für $0 < c \leq \frac{46}{7}$ ist $E(t) \leq c$ äquivalent zu

$$t \geq -\frac{50}{7}\log\Big(\frac{7}{46}c\Big) \geq 0.$$

Die Abweichung ist also ab dem Zeitpunkt

$$t_{10^{-1}} = -\frac{50}{7}\log\frac{7}{460} \approx 29.9$$

kleiner als 10^{-1} und ab dem Zeitpunkt

$$t_{10^{-5}} = -\frac{50}{7}\log\frac{7}{4600000} \approx 95.7$$

kleiner als 10^{-5}.