Universität Ulm

Mittwoch, 05.05.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 20+4

Lösungen Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 2

5. Bestimme eine maximale Lösung folgender Anfangswertprobleme:

(a) $y'(t) = 2\cos(t)\sin(t)y(t) + \mathrm{e}^{-\cos^2(t)}$, $y(0) = 3$; (2)

Lösung: Für die Lösung gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-\sin^2(t)}y(t)) = \mathrm{e}^{-\sin^2(t)}(-2\sin(t)\cos(t)y(t) + y'(t)) = \mathrm{e}^{-\sin^2(t)-\cos^2(t)} = \mathrm{e}^{-1}.$$

Durch Integration erhält man

$$\mathrm{e}^{-\sin^2(t)}y(t) - 3 = \mathrm{e}^{-1}t$$

und somit

$$y(t) = (\tfrac{t}{\mathrm{e}} + 3)\mathrm{e}^{\sin^2(t)}.$$

Also ist dies die eindeutige Lösung auf dem maximalen Lösungsintervall $\mathbb{R}$.

(b) $y'(t) = (1 + t^2)y(t)^2$, $y(0) = \frac{3}{4}$; (2)

Lösung: Ist y eine Lösung, so ist

$$-\frac{1}{y(t)} + \frac{4}{3} = \int_0^t \frac{y'(s)}{y(s)^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^t (1 + s^2)\,\mathrm{d}s = t + \frac{t^3}{3}.$$

Für die Lösung ergibt sich also

$$y(t) = \frac{1}{\frac{4}{3} - t - \frac{t^3}{3}}$$

für das maximale Lösungsintervall $(-\infty, 1)$, da 1 die kleinste Nullstelle des Polynoms $t^3 + 3t - 4 = (t - 1)(t^2 + t + 4)$ ist.

(c) $y'(t) = \frac{1}{1+\tan^2(y(t))}$, $y(0) = \pi$; (2)

Lösung: Ist y eine Lösung, so gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan(y(t)) = \big(1 + \tan^2(y(t))\big)y'(t) = 1,$$

also $\tan(y(t)) = t + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Aus der Anfangsbedingung folgt $c = \tan(\pi) = 0$, also $\tan(y(t)) = t$.

Bei der Auflösung dieser Gleichung nach $y(t)$ darf man nicht vergessen, dass die Gleichung $\arctan(\tan(x)) = x$ nur für $|x| < \frac{\pi}{2}$ richtig ist. Im Allgemeinen gilt $\arctan(\tan(x)) = x + k\pi$ für ein $k = k(x) \in \mathbb{Z}$. Also ist $y(t) = \arctan(t) + k\pi$, wobei k nicht von t abhängen kann, weil y eine stetige Funktion ist. Damit die Anfangsbedingung erfüllt ist, muss man $k = 1$ wählen. Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems ist somit $y(t) = \arctan(t) + \pi$. Das maximale Lösungsintervall ist $\mathbb{R}$.

(d) $t^2y'(t) = ty(t) + y(t)^2$, $y(1) = 1$; (2)

Tipp: Betrachte $z(t) \coloneqq \frac{y(t)}{t}$.

Lösung: Für $t > 0$ können wir die Gleichung auch als

$$y'(t) = \frac{y(t)}{t} + \Big(\frac{y(t)}{t}\Big)^2$$

schreiben. Diese Gleichung fällt weder in die Klasse der getrennten Veränderlichen noch ist es eine lineare Differentialgleichung. Die neue Darstellung legt allerdings nahe, die im Tipp angegebene Funktion $z(t) := \frac{y(t)}{t}$ einzuführen. Dann ist $y'(t) = z(t) + z(t)^2$ und somit

$$z'(t) = \frac{y'(t)}{t} - \frac{y(t)}{t^2} = \frac{z(t)}{t} + \frac{z(t)^2}{t} - \frac{z(t)}{t} = \frac{z^2(t)}{t}.$$

Zudem gilt $z(1) = 1$. Dieses Anfangswertproblem für z kann man wie in der Vorlesung behandelt lösen: Für jede Lösung z gilt

$$-\frac{1}{z(t)} + 1 = \int_1^t \frac{z'(s)}{z^2(s)}\,\mathrm{d}s = \int_1^t \frac{\mathrm{d}s}{s} = \log t,$$

und daher ist

$$y(t) = tz(t) = \frac{t}{1 - \log t}.$$

Dies definiert auf $(0, \mathrm{e})$ auch tatsächlich eine Lösung der ursprünglichen Gleichung. Die Lösung kann nicht nach e fortgesetzt werden, besitzt allerdings eine differenzierbare Fortsetzung in 0, nämlich $y(0) = 0$ mit $y'(0) = 0$, wie man an

$$y'(t) = \frac{y(t)}{t} + \Big(\frac{y(t)}{t}\Big)^2 = \frac{1}{1 - \log t} + \frac{1}{(1 - \log t)^2}$$

ablesen kann. Eine mögliche maximale Lösung ist nun

$$y(t) := \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{t}{1 - \log(t)}, & t \in (0, \mathrm{e}), \end{cases}$$

eine weitere ist

$$y(t) := \frac{|t|}{1 - \log|t|} \quad (-\mathrm{e} < t < \mathrm{e}).$$

Bemerkung: In der Aufgabenstellung war ursprünglich nach *der* maximalen Lösung gefragt. Da die Gleichung zwar differenzierbare Koeffizienten hat, aber nicht in Normalform vorliegt, greift hier allerdings der Existenz- und Eindeutigkeitssatz nicht direkt. Daher kann, was in diesem Beispiel tatsächlich der Fall ist, auch Nichteindeutigkeit der Lösungen auftreten. Korrekt hätte also nach *allen* maximalen Lösungen oder nach *einer* maximalen Lösung gefragt werden sollen. Volle Punktzahl gibt es für irgendeine maximale Lösung oder die Beobachtung, dass die Aufgabe nicht wohlgestellt war; die Lösung nur auf $(0, \mathrm{e})$ anzugeben gibt hingegen einen geringen Punktabzug.

6. Sei $0 < \alpha < 1$. Zeige:

(a) Für alle $-\infty \le c \le d \le \infty$ ist

$$y_{c,d}(t) := \begin{cases} -\big((1-\alpha)(c-t)\big)^{\frac{1}{1-\alpha}}, & t \le c, \\ 0, & c < t < d \\ \big((1-\alpha)(t-d)\big)^{\frac{1}{1-\alpha}}, & t \ge d, \end{cases}$$

eine Lösung der Differentialgleichung $y'(t) = |y(t)|^\alpha$. (2)

Hinweis: Insbesondere ist $y_{c,d} \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ zu zeigen.

Lösung: Offenbar ist y auf den Intervallen $(-\infty, c)$, (c, d) und (d, ∞) als Verkettung stetig differenzierbarer Funktionen stetig differenzierbar; die Funktion $x \mapsto x^\beta$ ist ja für alle $\beta \in \mathbb{R}$ auf $(0, \infty)$ stetig differenzierbar. Für diese Bereiche rechnet man mit der Kettenregel nach, dass

$$y'_{c,d}(t) = \begin{cases} (1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}-1}(c-t)^{\frac{1}{1-\alpha}-1} = |y_{c,d}(t)|^\alpha, & t < c \\ 0 = |y_{c,d}(t)|^\alpha, & c < t < d, \\ (1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}-1}(t-d)^{\frac{1}{1-\alpha}-1} = |y_{c,d}(t)|^\alpha, & t > d \end{cases}$$

gilt.

Hieraus kann man ablesen, dass der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert von y und y' in den Punkten c und d jeweils existieren und den Wert 0 haben. Aus den Grundvorlesungen sollte bekannt sein, dass dies ausreicht, um stetige Differenzierbarkeit in diesen Punkten zu garantieren; dies folgt leicht aus dem Mittelwertsatz. Da die Funktion $y_{c,d}$ die Differentialgleichung auf $\mathbb{R} \setminus \{c, d\}$ löst, löst sie sie wegen Stetigkeit von y und y' sogar auf ganz $\mathbb{R}$.

(b) *Bonusaufgabe:* Sei $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $y'(t) = |y(t)|^\alpha$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $-\infty \leq c \leq d \leq \infty$ mit $y(t) = y_{c,d}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. (+2)

Lösung: Sei y eine Lösung. Dann ist $y'(t) \geq 0$ für alle $t \in (a, b)$. Also ist y monoton wachsend. Da die Funktion $x \mapsto |x|^\alpha$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar ist, gibt es nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz zu jeder Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ mit $y_0 \neq 0$ eine lokal eindeutige Lösung. Genauer gesagt ist diese Lösung zumindest auf dem größten Intervall eindeutig, auf dem sie keine Nullstelle besitzt.

Sei $c \coloneqq \sup\{t \in \mathbb{R} : y(t) < 0\}$ und $d \coloneqq \inf\{t \in \mathbb{R} : y(t) > 0\}$. Hierbei ist $c = \pm\infty$ und $d = \pm\infty$ zugelassen. Aus der Monotonie folgt $c \leq d$.

Sei nun zuerst $c > -\infty$. Dann gibt es $t_1 \leq c$ mit $y(t_1) < 0$. Wegen lokal eindeutiger Lösbarkeit ist somit für

$$\tilde{c} \coloneqq t_1 + \frac{(-y(t_1))^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

die Gleichung $y(t) = y_{\tilde{c},d}(t)$ für alle $t < \tilde{c}$ erfüllt. Daher ist $y(\tilde{c}) = 0$ und somit $y(t) \geq 0$ für alle $t \geq \tilde{c}$. Hieraus folgt $\tilde{c} = c$, also $y(t) = y_{c,d}(t)$ für $t < c$. Ist hingegen $c = -\infty$, so gilt $y(t) = y_{c,d}(t)$ trivialweise für alle $t < c$.

Analog ergibt sich $y(t) = y_{c,d}(t)$ für alle $t > d$, indem man mit

$$\tilde{d} \coloneqq t_2 - \frac{y(t_2)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

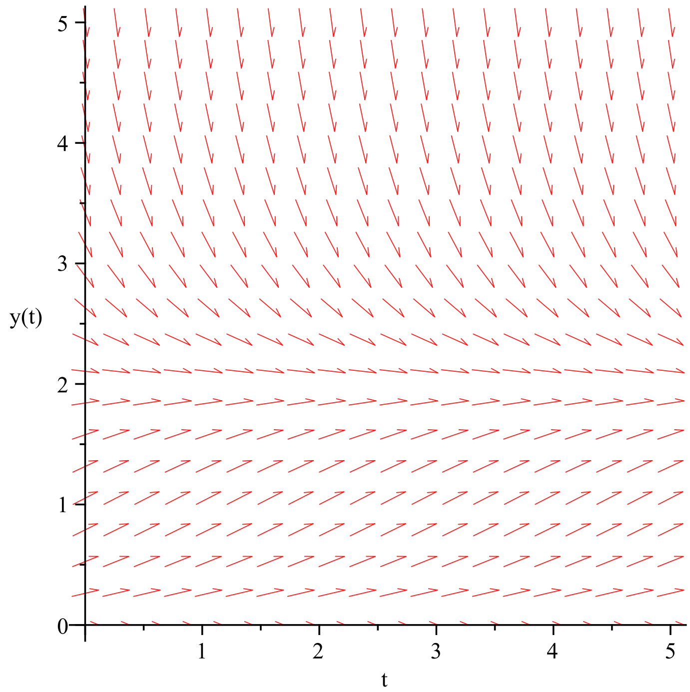
für ein t_2 mit $y(t_2) > 0$ argumentiert.

Zudem ist $y(t) = 0$ für $t \in (c, d)$ nach Definition von c und d. Wir haben also $y(t) = y_{c,d}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{c, d\}$ und somit wegen Stetigkeit für alle $t \in \mathbb{R}$ bewiesen.

7. *Die logistische Gleichung:* Wir betrachten das Anfangswertproblem $y'(t) = ry(t)(1 - \frac{y(t)}{K})$, $y(0) = y_0$ mit festen Parametern $r > 0$, $K > 0$ und $y_0 > 0$.

(a) Skizziere für $r = 1$ und $K = 2$ das zu dieser Differentialgleichung gehörende Richtungsfeld im Bereich $t \in [0, 5]$ und $y \in [0, 5]$! (2)

Lösung:



(b) Bestimme die eindeutige Lösung das Anfangswertproblems in Abhängigkeit der Parameter und des Anfangswerts und bestimme das maximale Lösungsintervall! (2)

Lösung: Für $y_0 = K$ ist offenbar $y(t) \equiv K$ eine (und somit die einzige) Lösung des Problems. Wir dürfen im Folgenden also $y_0 \neq K$ annehmen.
Für die Lösung gilt

$$y'(t)\Big(\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{K - y(t)}\Big) = \frac{Ky'(t)}{y(t)(K - y(t))} = r,$$

worauf man durch Partialbruchzerlegung kommt. Integriert man diese Gleichung, ergibt sich

$$\log(y(t)) - \log(y_0) - \log|K - y(t)| + \log|K - y_0| = rt,$$

was man auch als

$$\log\Big|\frac{y(t)}{K - y(t)}\Big| = rt + \log\Big|\frac{y_0}{K - y_0}\Big|$$

schreiben kann. Somit ist

$$\Big|\frac{K}{K - y(t)} - 1\Big| = \Big|\frac{y(t)}{K - y(t)}\Big| = \Big|\frac{y_0}{K - y_0}\Big|\mathrm{e}^{rt}.$$

Zumindest bei $t = 0$ haben beide Ausdrücke das gleiche Vorzeichen, sodass wir die Gleichung zu

$$\frac{K}{K - y(t)} = 1 + \frac{y_0}{K - y_0}\mathrm{e}^{rt}$$

vereinfachen können. Somit ist

$$y(t) = K - \frac{K}{1 + \frac{y_0}{K - y_0}\mathrm{e}^{rt}} = \frac{\frac{Ky_0}{K - y_0}\mathrm{e}^{rt}}{1 + \frac{y_0}{K - y_0}\mathrm{e}^{rt}} = \frac{Ky_0}{y_0 + (K - y_0)\mathrm{e}^{-rt}},$$

was für $y_0 \leq K$ tatsächlich eine Lösung darstellt auf ganz $\mathbb{R}$ darstellt. Für $y_0 > K$ ist dies zumindest eine Lösung auf (t_0, ∞), wobei $y_0 + (K - y_0)\mathrm{e}^{-rt_0} = 0$ gelte, also

$$t_0 = -\frac{1}{r}\log\frac{y_0}{y_0 - K} < 0,$$

und dieses Lösungsintervall ist maximal, da $\lim_{t\to t_0^+} y(t) = \infty$ gilt. Es war also gerechtfertigt, die Beträge in obiger Gleichung zu streichen, was auch schon aus den Resultaten der Vorlesung klar war, da die Lösung die konstante Lösung bei K nie schneiden kann.

(c) Für welche Parameter und Anfangswerte konvergiert die Lösung y für $t \to \infty$? Was ist in diesen Fällen der Grenzwert? (2)

Lösung: Aus der Darstellungsformel sieht man sofort, dass die Lösung für alle Konstellationen gegen K konvergiert, wenn t gegen unendlich geht.

8. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f. Sei $y\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Gleichung $y'(t) = f(y(t))$ auf einem offenen Intervall I. Zeige:

(a) Die Funktion $t \mapsto F(y(t))$ ist monoton wachsend. (2)

Lösung: Nach der Kettenregel und nach Wahl von F gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(y(t)) = f(y(t))y'(t) = (y'(t))^2 \geq 0$$

für alle $t \in I$. Also ist $F \circ y$ monoton wachsend.

(b) Gibt es Punkte $t_1 < t_2$ in I mit $F(y(t_1)) = F(y(t_2))$, so gilt $y(t_1) = y(t) = y(t_2)$ für alle $t \in [t_1, t_2]$. (2)

Lösung: Ist $F(y(t_1)) = F(y(t_2))$, so ist wegen Monotonie die Funktion $F \circ y$ auf $[t_1, t_2]$ konstant. Es gilt also

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(y(t)) = (y'(t))^2$$

für $t \in (t_1, t_2)$, woraus $y'(t) = 0$ für $t \in (t_1, t_2)$ folgt. Also ist y auf $[t_1, t_2]$ konstant.

(c) *Bonusaufgabe:* Die Funktion y ist auf I monoton. (+2)

Lösung: Angenommen, y ist nicht monoton. Dann gibt es Punkte $\xi_1 < \xi < \xi_2$ mit entweder $y(\xi_1) < y(\xi) > y(\xi_2)$ oder $y(\xi_1) > y(\xi) < y(\xi_2)$. Wir betrachten hier nur den ersten Fall und nehmen zudem $y(\xi_1) \leq y(\xi_2)$ an; die restlichen Fälle verlaufen analog.

Setze nun $t_2 \coloneqq \xi_2$. Wegen $y(\xi_1) \leq y(t_2) < y(\xi)$ gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $t_1 \in [\xi_1, \xi)$ mit $y(t_1) = y(t_2)$. Nach dem vorigen Aufgabenteil ist dann $y(\xi) = y(t_1) = y(t_2)$, denn $\xi \in (t_1, t_2)$. Dies widerspricht aber der Wahl von ξ.