Universität Ulm

Mittwoch, 12.05.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka

Sommersemester 2010
Punktzahl: 20

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 3

9. Bestimme die Lösungen und deren maximale Lösungsintervalle für folgende Anfangswertprobleme:

(a) $y'(t) = \arctan\bigl(\mathrm{e}^{y(t)-\cos(y(t))}\sin(y(t))\bigr)\mathrm{e}^{\sin(t)-\cos(t)}$, $y(0) = 0$; (1)

(b) $y'(t) = (t + \cos(t))\sqrt{1 + y(t)^2}$, $y(0) = 0$; (1)

(c) $y'(t) = \cos(t) + \sin(t)y(t)$, $y(0) = 0$; (1)

(d) $y'(t) = (t + y(t) + 1)^2$, $y(0) = 0$. (2)

10. (a) Sei $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig. Die Funktion $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^d$ erfülle $y'(t) = g(y(t))$ für alle $t \geq 0$ und konvergiere für $t \to \infty$ gegen ein $a \in \mathbb{R}^d$. Zeige $g(a) = 0$! (2)

(b) Sei $\beta > 0$, $0 < K_1 < y_0 < K_2$, und sei y die eindeutige Lösung der Differentialgleichung $y'(t) = \beta(K_2 - y(t))^2(y(t) - K_1)y(t)$ zum Anfangswert $y(0) = y_0$ auf dem maximalen Lösungsintervall $I \subset \mathbb{R}$. Zeige $I = \mathbb{R}$, $\lim_{t\to-\infty} y(t) = K_1$ und $\lim_{t\to\infty} y(t) = K_2$! (2)

11. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $\mathrm{C}(I)$ der Raum der stetigen Funktionen auf I, versehen mit der Supremumsnorm. Sei $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, und sei $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in der zweiten Variablen global Lipschitz-stetig ist. Sei Φ durch $\Phi(y)(t) \coloneqq y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\,\mathrm{d}s$ für $y \in \mathrm{C}(I)$, $t \in I$ definiert. Zeige:

(a) Der Operator Φ bildet $\mathrm{C}(I)$ in sich selbst ab, d.h. $\Phi(y) \in \mathrm{C}(I)$ für alle $y \in \mathrm{C}(I)$. (1)

(b) Der Operator Φ ist stetig von $\mathrm{C}(I)$ nach $\mathrm{C}(I)$. (2)

(c) Sei $y \in \mathrm{C}(I)$. Die Eigenschaft $\Phi(y) = y$ ist äquivalent dazu, dass y das Anfangswertproblem $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ löst. (1)
Hinweis: Insbesondere ist also zu zeigen, dass aus $\Phi(y) = y$ die Differenzierbarkeit von y folgt.

12. Sei $\mathcal{F}^b(I)$ der Vektorraum der beschränkten, reellwertigen Funktionen auf einer Menge $I \subset \mathbb{R}$. Zeige:

(a) Die Supremumsnorm $\|u\|_\infty \coloneqq \sup_{t\in I} |u(t)|$ definiert eine Norm auf $\mathcal{F}^b(I)$. (1)

(b) Der Raum $\mathrm{F}^b(I)$ ist ein Banachraum bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$. (3)
Anleitung: Sei (u_n) eine Cauchy-Folge in $\mathcal{F}^b(I)$. Zeige, dass $(u_n(t))$ für jedes $t \in I$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist, und schlussfolgere, dass (u_n) einen punktweisen Grenzwert u besitzt. Zeige dann, dass u wiederum beschränkt ist und (u_n) sogar in Norm gegen u konvergiert.

(c) Der Raum $\mathrm{C}^b(I)$ der beschränkten, stetigen Funktionen auf I ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{F}^b(I)$. (2)

(d) Der Raum $\mathrm{C}^b(I)$ ist ein Banachraum bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$. (1)