Universität Ulm

Mittwoch, 12.05.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 20

Lösungen Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 3

9. Bestimme die Lösungen und deren maximale Lösungsintervalle für folgende Anfangswertprobleme:

(a) $y'(t) = \arctan\big(\mathrm{e}^{y(t)-\cos(y(t))}\sin(y(t))\big)\mathrm{e}^{\sin(t)-\cos(t)}$, $y(0) = 0$; (1)

Lösung: Offenbar ist $y \equiv 0$ eine Lösung des Problems auf $\mathbb{R}$. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz ist dies auch die einzige Lösung des Problems.

(b) $y'(t) = (t + \cos(t))\sqrt{1 + y(t)^2}$, $y(0) = 0$; (1)

Lösung: Es gibt eine eindeutige Lösung. Diese muss

$$\operatorname{Arsinh}(y(t)) = \int_0^t \frac{y'(s)}{\sqrt{1+y(s)^2}}\,\mathrm{d}s = \int_0^t (s + \cos(s))\,\mathrm{d}s = \frac{t^2}{2} + \sin(t)$$

erfüllen, also

$$y(t) = \sinh\big(\tfrac{t^2}{2} + \sin(t)\big),$$

was eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

(c) $y'(t) = \cos(t) + \sin(t)y(t)$, $y(0) = 0$; (1)

Lösung: Es ist $\int_0^t \sin(t) = -\cos(t) + 1$. Nach Skript ist also

$$y(t) = \mathrm{e}^{1-\cos(t)} \int_0^t \mathrm{e}^{\cos(s)-1}\cos(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \mathrm{e}^{\cos(s)-\cos(t)}\cos(s)\,\mathrm{d}s$$

die eindeutige Lösung auf $\mathbb{R}$. Dies lässt sich nicht weiter vereinfachen.

(d) $y'(t) = (t + y(t) + 1)^2$, $y(0) = 0$. (2)

Lösung: Es bietet sich die Substitution $z(t) \coloneqq t + y(t) + 1$ an. Dann ist

$$z'(t) = 1 + y'(t) = 1 + (t + y(t) + 1)^2 = 1 + z(t)^2$$

und $z(0) = 1$. Daher ist

$$\arctan(z(t)) - \arctan(1) = \int_0^t \frac{z'(s)}{1 + z(s)^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^t 1\,\mathrm{d}s = t,$$

also

$$z(t) = \tan(t + \tfrac{\pi}{4})$$

und somit

$$y(t) = \tan(t + \tfrac{\pi}{4}) - t - 1.$$

Auf $(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ ist dies eine Lösung. Die Funktion lässt sich nicht stetig in die Randpunkte fortsetzen, was zeigt, dass das Lösungsintervall maximal ist. Der Eindeutigkeitssatz liefert die Eindeutigkeit der Lösung.

10. (a) Sei $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig. Die Funktion $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^d$ erfülle $y'(t) = g(y(t))$ für alle $t \geq 0$ und konvergiere für $t \to \infty$ gegen ein $a \in \mathbb{R}^d$. Zeige $g(a) = 0$! (2)

Lösung: Da $y(t)$ konvergiert und g stetig ist, gilt $\lim_{t\to\infty} y'(t) = g(a) =: b$, also $y_i'(t) \to b_i$ für $t \to \infty$ für $i = 1, \dots, d$. Nach dem Mittelwertsatz gilt dann

$$0 = a - a \leftarrow y_i(t+1) - y_i(t) = y_i'(\xi_t) \to b_i$$

für $t \to \infty$, wobei $\xi_t \in (t, t+1)$ ist. Das zeigt wie behauptet $b = 0$.

(b) Sei $\beta > 0$, $0 < K_1 < y_0 < K_2$, und sei y die eindeutige Lösung der Differentialgleichung $y'(t) = \beta(K_2 - y(t))^2(y(t) - K_1)y(t)$ zum Anfangswert $y(0) = y_0$ auf dem maximalen Lösungsintervall $I \subset \mathbb{R}$. Zeige $I = \mathbb{R}$, $\lim_{t\to-\infty} y(t) = K_1$ und $\lim_{t\to\infty} y(t) = K_2$! (2)

Lösung: Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz hat das Problem eine eindeutige Lösung y. Es kann für kein $t_0 \in \mathbb{R}$ die Gleichung $y(t_0) = K_1$ oder $y(t_0) = K_2$ erfüllt sein. Wäre das nämlich der Fall, so wäre nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz $y(t) = K_1$ bzw. $y(t) = K_2$ für alle $t \in \mathbb{R}$, da diese Funktionen Lösungen des Problems sind. Das ist ein Widerspruch zur Anfangsbedingung $y(0) = y_0 \in (K_1, K_2)$. Dieses Argument ist nur nochmals eine ausführliche Formulierung der Tatsache, dass sich Bahnen nicht kreuzen.

Insbesondere folgt nun mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass $K_1 < y(t) < K_2$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, also y insbesondere beschränkt ist. Laut Vorlesung zeigt dies, dass y eine globale Lösung sein muss, also $I = \mathbb{R}$ das maximale Lösungsintervall ist.

Zudem folgt aus $K_1 < y(t) < K_2$ auch $y'(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Also ist y monoton wachsend, und somit existieren die Grenzwerte $a := \lim_{t\to-\infty} y(t)$ und $b := \lim_{t\to\infty} y(t)$, wobei $a \in [K_1, y_0]$ und $b \in [y_0, K_2]$ gelten muss. Nach dem vorigen Aufgabenteil (und der analogen Aussage für den Grenzwert bei $-\infty$) ist aber $g(a) = 0$ und $g(b) = 0$ für $g(x) := \beta(K_2 - x)^2(x - K_1)x$, was aufgrund der Einschränkungen an a und b nur für $a = K_1$ und $b = K_2$ möglich ist.

11. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $\mathrm{C}(I)$ der Raum der stetigen Funktionen auf I, versehen mit der Supremumsnorm. Sei $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, und sei $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in der zweiten Variablen global Lipschitz-stetig ist. Sei Φ durch $\Phi(y)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\,\mathrm{d}s$ für $y \in \mathrm{C}(I)$, $t \in I$ definiert. Zeige:

(a) Der Operator Φ bildet $\mathrm{C}(I)$ in sich selbst ab, d.h. $\Phi(y) \in \mathrm{C}(I)$ für alle $y \in \mathrm{C}(I)$. (1)

Lösung: Sei $y \in \mathrm{C}(I)$. Dann ist $s \mapsto f(s, y(s))$ als Komposition stetiger Funktionen stetig. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $\Phi(y)$ dann sogar eine differenzierbare Funktion auf I, insbesondere also stetig.

(b) Der Operator Φ ist stetig von $\mathrm{C}(I)$ nach $\mathrm{C}(I)$. (2)

Lösung: Sei L die Lipschitz-Konstante von f. Dann ist

$$\begin{aligned} \left|\Phi(y_1)(t) - \Phi(y_2)(t)\right| &\le \left|\int_{t_0}^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))|\,\mathrm{d}s\right| \\ &\le \left|\int_{t_0}^t L|y_1(s) - y_2(s)|\,\mathrm{d}s\right| \le L|I|\,\|y_1 - y_2\|_\infty, \end{aligned}$$

wobei $|I|$ die Länge des Intervalls I bezeichne. Das zeigt $\|\Phi(y_1) - \Phi(y_2)\|_\infty \le c\|y_1 - y_2\|_\infty$ mit der Konstanten $c := L|I|$.

Sei nun (y_n) eine Folge in $\mathrm{C}(I)$, die gegen $y \in \mathrm{C}(I)$ konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|y_n - y\|_\infty < \frac{\varepsilon}{c}$ für alle $n \ge n_0$. Dann ist

$$\|\Phi(y_n) - \Phi(y)\|_\infty \le c\|y_n - y\|_\infty < \varepsilon$$

für $n \ge n_0$. Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, zeigt dies $\lim_{n\to\infty} \Phi(y_n) = \Phi(y)$. Weil (y_n) eine beliebige konvergente Folge war, zeigt dies nach Definition die Stetigkeit von Φ.

Bemerkung: Im zweiten Teil haben wir gezeigt, dass jede Lipschitz-stetige Funktion stetig ist.

(c) Sei $y \in \mathrm{C}(I)$. Die Eigenschaft $\Phi(y) = y$ ist äquivalent dazu, dass y das Anfangswertproblem $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ löst. (1)

Hinweis: Insbesondere ist also zu zeigen, dass aus $\Phi(y) = y$ die Differenzierbarkeit von y folgt.

Lösung: Es gelte $\Phi(y) = y$, also

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s$$

für alle $t \in I$. Setzt man in der Gleichung speziell $t = t_0$, ergibt sich $y(t_0) = y_0$. Zudem ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die rechte Seite differenzierbar mit Ableitung $f(t, y(t))$. Also ist y differenzierbar und $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$.
Ist umgekehrt $y(t_0) = y_0$ und $y'(t) = f(s, y(s))$, so ergibt sich aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$y(t) - y_0 = y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} y'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s = \Phi(y)(t) - y_0$$

für alle $t \in I$, was gerade $y = \Phi(y)$ bedeutet.

12. Sei $\mathcal{F}^b(I)$ der Vektorraum der beschränkten, reellwertigen Funktionen auf einer Menge $I \subset \mathbb{R}$. Zeige:

(a) Die Supremumsnorm $\|u\|_\infty := \sup_{t\in I} |u(t)|$ definiert eine Norm auf $\mathcal{F}^b(I)$. (1)

Lösung: klar

(b) Der Raum $\mathrm{F}^b(I)$ ist ein Banachraum bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$. (3)
Anleitung: Sei (u_n) eine Cauchy-Folge in $\mathcal{F}^b(I)$. Zeige, dass $(u_n(t))$ für jedes $t \in I$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist, und schlussfolgere, dass (u_n) einen punktweisen Grenzwert u besitzt. Zeige dann, dass u wiederum beschränkt ist und (u_n) sogar in Norm gegen u konvergiert.

Lösung: Sei (u_n) eine Cauchy-Folge in $\mathcal{F}^b(I)$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|u_n - u_m\|_\infty \le \varepsilon$ für $n, m \ge n_0$. Dann ist

$$|u_n(t) - u_m(t)| \le \|u_n - u_m\|_\infty \le \varepsilon$$

für alle $t \in I$, $n, m \ge n_0$. Das bedeutet, dass $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $t \in I$ eine Cauchy-Folge ist. Weil in $\mathbb{R}$ jede Cauchy-Folge konvergiert, existiert somit $u(t) := \lim_{n\to\infty} u_n(t)$.
Weil der Betrag stetig ist, erhält man sogar

$$|u_n(t) - u(t)| = \lim_{m\to\infty} |u_n(t) - u_m(t)| \le \limsup_{m\to\infty} \|u_n - u_m\|_\infty \le \varepsilon$$

für alle $n \ge n_0$ und alle $t \in I$. Insbesondere ist

$$|u(t)| \le |u_{n_0}(t) - u(t)| + |u_{n_0}(t)| \le \varepsilon + \|u_{n_0}\|_\infty$$

für alle $t \in I$, was $u \in \mathcal{F}^b(I)$ zeigt (man kann beispielsweise $\varepsilon = 1$ setzen). Außerdem zeigt die vorletzte Gleichung

$$\|u_n - u\|_\infty \le \varepsilon$$

für $n \ge n_0$. Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, zeigt dies nach Definition $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ in der Norm von $\mathcal{F}^b(I)$.
Wir haben bewiesen, dass in $\mathcal{F}^b(I)$ jede Cauchy-Folge konvergiert. Nach Definition bedeutet dies, dass $\mathcal{F}^b(I)$ ein Banachraum ist.

(c) Der Raum $\mathrm{C}^b(I)$ der beschränkten, stetigen Funktionen auf I ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{F}^b(I)$. (2)

Lösung: Sei (u_n) eine Folge in $\mathrm{C}^b(I)$, die gegen ein $u \in \mathcal{F}^b(I)$ konvergiert. Da u nach Voraussetzung beschränkt ist, müssen wir nur noch zeigen, dass u stetig ist. Sei dazu $t_0 \in I$ beliebig.

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|u - u_n\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n \geq n_0$. Weil u_{n_0} stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $|u_{n_0}(t) - u_{n_0}(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $t \in I$ mit $|t - t_0| < \delta$. Dann gilt

$$|u(t) - u(t_0)| \leq |u(t) - u_{n_0}(t)| + |u_{n_0}(t) - u_{n_0}(t_0)| + |u_{n_0}(t_0) - u(t_0)| \leq \varepsilon$$

für alle $t \in I$ mit $|t - t_0| < \delta$. Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, zeigt dies die Stetigkeit von u in t_0.

(d) Der Raum $\mathrm{C}^b(I)$ ist ein Banachraum bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$. (1)

Lösung: Im Hinblick auf die vorigen Aufgabenteile muss man nur noch zeigen, dass eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raums bezüglich der induzierten Metrik selbst ein vollständiger metrischer Raum ist.

Sei dazu (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und A eine abgeschlossene Teilmenge von M. Dann ist die Einschränkung von d auf A offenbar wieder eine Metrik, die *induzierte Metrik*, die immer noch mit d bezeichnet werden soll. Wir müssen beweisen, dass (A, d) vollständig ist.

Sei (u_n) eine Cauchy-Folge in A. Dann kann man (u_n) auch als Cauchy-Folge in M auffassen. Weil M vollständig ist, besitzt (u_n) einen Grenzwert v in M, also $d(u_n, v) \to 0$ für $n \to \infty$. Nach Definition der Abgeschlossenheit ist aber sogar $v \in A$, und somit konvergiert (u_n) auch als Folge in (A, d) gegen v. Wir haben somit gezeigt, dass jede Cauchy-Folge in (A, d) konvergiert.

Bemerkung: Eigentlich ist die Vollständigkeit von $\mathrm{C}^b(I)$ nur eine Umformulierung des Cauchy-Kriteriums für gleichmäßige Konvergenz zusammen mit der Tatsache, dass der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen wiederum stetig ist.