Universität Ulm

Mittwoch, 19.05.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 20

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 4

13. *Lösungsgesamtheit für die Differentialgleichung $y''(t) = y(t)$:* In dieser Aufgabe werden zuerst durch einen Potenzreihenansatz Lösungen von $y''(t) = y(t)$ bestimmt. Danach wird gezeigt, dass die gefundenen Lösungen bereits alle Lösungen dieser Gleichung darstellen. Zeige:

(a) Sei y eine Lösung von $y''(t) = y(t)$ auf $\mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass y *in* 0 *analytisch* ist, also dass es eine Folge $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ reeller Zahlen und einen Radius $R > 0$ gibt, mit denen $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ für alle t mit $|t| < R$ gilt. Dann ist $(k+2)(k+1)a_{k+2} = a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. (2)

(b) Sei y eine in 0 analytische Lösung von $y''(t) = y(t)$ und R ein Radius, innerhalb dessen die entsprechenden Potenzreihe um $t = 0$ konvergiert und die Funktion darstellt. Ist $y(0) = 1$ und $y'(0) = 1$, so ist $y(t) = \mathrm{e}^t$ für $|t| < R$. Ist $y(0) = 1$ und $y'(0) = -1$, so ist $y(t) = \mathrm{e}^{-t}$ für $|t| < R$. (2)

(c) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $y(t) := a\mathrm{e}^t + b\mathrm{e}^{-t}$ eine Lösung von $y''(t) = y(t)$. (1)

(d) Für alle $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Funktion $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die zweimal stetig differenzierbar ist und $y''(t) = y(t)$, $y(0) = y_0$ und $y'(0) = y_1$ erfüllt. (2)

(e) Ist y eine Lösung von $y''(t) = y(t)$ auf $\mathbb{R}$, so gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $y(t) = a\mathrm{e}^t + b\mathrm{e}^{-t}$. (2)

14. Um das Anfangswertproblem $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(0) = y_0$ zu lösen, betrachten wir wie in der Vorlesung die *Picard-Iterierten*

$$y_0(t) := y_0 \quad \text{und} \quad y_{n+1}(t) := y_0 + \int_0^t f(s, y_n(s))\,\mathrm{d}s$$

für $n \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Sei $f(t, z) = z + t$ und $y_0 = 0$. Zeige, dass $y_n(t) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{t^k}{k!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt, und berechne unter Verwendung dieser Information die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems $y'(t) = y(t) + t$, $y(0) = 0$! (3)

(b) Sei $f(t, z) = z^2$ und $y_0 = 1$. Bestimme y_k für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ und zeichne diese Funktionen und die exakte Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = y(t)^2$, $y(0) = 1$ in ein gemeinsames Schaubild ein!
Hinweis: Wähle für die t-Achse das Intervall $[0, 1]$ und für die y-Achse das Intervall $[1, 4]$. (3)

15. *Differentialgleichungen erster Ordnung genügen:* Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f\colon D \to \mathbb{R}$, und sei $(t_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in D$. Zeige:

(a) Definiere $g\colon D \to \mathbb{R}^n$ durch

$$g_i(t, u_0, \ldots, u_{n-1}) = \begin{cases} u_{i+1}, & i = 0, \ldots, n-2, \\ f(t, u_0, \ldots, u_{n-1}), & i = n-1, \end{cases}$$

wobei $g = (g_0, \ldots, g_{n-1})^T$ sei, und $z\colon I \to \mathbb{R}^n$ durch

$$z(t) := (y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))^T$$

gegeben ist. Eine Funktion $y\colon I \to \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, ist genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\text{(AWP)} \begin{cases} y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)), \\ \quad y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \end{cases}$$

wenn z das Anfangswertproblem $z'(t) = g(t, z(t))$, $z(t_0) = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ löst. (3)

(b) Ist f stetig und in der zweiten Variablen lokal Lipschitz-stetig, so besitzt (AWP) eine eindeutige Lösung auf einem maximalen Lösungsintervall. (2)