# Universität Ulm

Mittwoch, 26.05.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 20+3

## Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 5

**16.** Löse folgende Anfangswertprobleme:

(a) $y''(t) + 2y'(t) + 4y(t) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; (2)

(b) $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$; (2)

(c) $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 0$; (2)

(d) $y''(t) - 2\cos(t)y'(t) + (\sin(t) + \cos^2(t))y(t) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; (3)
**Tipp:** Eine Lösung der Differentialgleichung (nicht aber des Anfangswertproblems) ist $y_1(t) = \mathrm{e}^{\sin(t)}$.

(e) $y''(t) - 2\cos(t)y'(t) + (\sin(t) + \cos^2(t))y(t) = 2\mathrm{e}^{\sin(t)}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$. (3)

**17.** *Freier Fall:* Ein punktförmiger Körper mit Masse $m > 0$ werde in einer Höhe $h_0 > 0$ aus der Ruhe heraus fallengelassen. Die Erdbeschleunigung sei $g > 0$ und es gebe keine Reibung, sodass die Höhe $h(t)$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$ bis zum Aufschlagszeitpunkt $t_0$ (also $h(t_0) = 0$) die Differentialgleichung $mh''(t) = -mg$ erfüllt.

(a) Sei $E_{\text{kin}}(t) \coloneqq \frac{1}{2}mh'(t)^2$ die kinetische Energie und $E_{\text{pot}}(t) \coloneqq mgh(t)$ die potentielle Energie des Körpers. Zeige den *Energieerhaltungssatz* $E_{\text{kin}}(t) + E_{\text{pot}}(t) \equiv \text{const.}$ für $0 \leq t \leq t_0$! (2)

(b) Berechne die Aufprallgeschwindigkeit $h'(t_0)$! (1)

(c) Untersuche das Grenzwertverhalten von $h'(t_0)$ für $h_0 \to \infty$! (1)

**18.** *Gebremster Fall:* Ein punktförmiger Körper mit Masse $m > 0$ werde in einer Höhe $h_0 > 0$ aus der Ruhe heraus fallengelassen. Die Erdbeschleunigung sei $g > 0$, der Luftwiderstand $\varrho > 0$, sodass die Höhe $h(t)$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$ bis zum Aufschlagszeitpunkt $t_0$ (also $h(t_0) = 0$) die Differentialgleichung $mh''(t) = -mg - \varrho h'(t)$ erfüllt.

(a) Zeige, dass die Gesamtenergie des Systems abnimmt, also dass $E_{\text{kin}}(t) + E_{\text{pot}}(t)$ eine bezüglich $t$ streng monoton fallende Funktion ist! (2)

(b) Berechne $h(t)$ für $0 \leq t \leq t_0$! (2)

(c) Untersuche das Grenzwertverhalten von $h'(t_0)$ für $h_0 \to \infty$. (+3)