# Universität Ulm

Freitag, 08.10.2010, 10:00-12:00

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 50

## Gewöhnliche Differentialgleichungen: Klausur 2

**1.** Bestimmen Sie die Lösung (in möglichst einfacher Darstellung) folgender Anfangswertprobleme und geben Sie das maximale Lösungsintervall an:

(a) $y'(t) = \sin(t)y(t) + \frac{t}{t^2-1}\mathrm{e}^{-\cos(t)}$, $y(\pi) = 0$; (10)

(b) $y'(t) = 2ty(t)(2 - y(t))$, $y(0) = 1$. (10)

**2.** Bestimmen Sie sämtliche reellen Lösungen $y$ der Differentialgleichung

$$y^{(6)}(t) + y^{(5)}(t) - 2y^{(3)}(t) = 12$$

sechster Ordnung! (10)
**Tipp:** Man kann leicht ein Polynom dritten Grades raten, das die Gleichung löst.

**3.** Wir betrachten eine Versuchsanordnung mit 4 Wassertanks $T_1$, $T_2$, $T_3$ und $T_4$ mit jeweils 1 Volumeneinheiten Wasser Inhalt. Zu Beginn (Zeitpunkt $t = 0$) ist im Tank $T_1$ eine Menge von $s_1(0) = 4$ Mengeneinheiten Salz gelöst, während in den übrigen Tanks kein Salz vorhanden ist. Es strömt kontinuierlich Wasser zwischen den Tanks, und zwar in jeder Zeiteinheit je eine Volumeneinheit von $T_1$ nach $T_4$, von $T_4$ nach $T_3$, von $T_3$ nach $T_2$ und von $T_2$ nach $T_1$. Man darf davon ausgehen, dass das Salz zu jedem Zeitpunkt innerhalb der einzelnen Tanks homogen verteilt ist. Bestimmen Sie die Salzmengen $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$ und $s_4(t)$ in den einzelnen Tanks zum Zeitpunkt $t \geq 0$ und untersuchen Sie das Langzeitverhalten! (10)

**Tipp:** $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4 = (\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 2)$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

**4.** Entscheiden Sie (ohne Begründung), ob folgende Aussagen (immer) richtig oder (im Allgemeinen) falsch sind. Kreuzen Sie die entsprechenden Antworten auf der dafür vorgesehenen Seite des Prüfungsbogen an! (10)

(1) Sei $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Die Funktionen $y_1(t) := \mathrm{e}^t$ und $y_2(t) := -\mathrm{e}^t$ seien globale Lösungen von $y'(t) = f(t, y(t))$. Dann besitzt das Anfangswertproblem $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(0) = 0$ eine globale Lösung.

(2) Sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar und $f'$ beschränkt (d.h. $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ist für alle $i$ und $j$ eine beschränkte Funktion, wobei $f_i$ die $i$.te Komponente von $f$ bezeichnet). Dann besitzt das Anfangswertproblem $y'(t) = f(y(t))$, $y(0) = 0$ eine globale Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$.

(3) Ist 0 der einzige Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, so ist jede Lösung von $y'(t) = Ay(t)$ beschränkt.

(4) Es gibt eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die das Anfangswertproblem $y'(t) = f(y(t))$, $y(0) = 0$ überabzählbar viele Lösungen besitzt.

(5) Gilt $y_1'(t) = A(t)y_1(t)$ und $y_2'(t) = A(t)y_2(t)$ für eine stetige Funktion $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{4\times 4}$, $y_1, y_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, und sind die Vektoren $y_1(1)$ und $y_2(1)$ linear unabhängig, so sind auch die Vektoren $y_1(0)$ und $y_2(0)$ linear unabhängig.

Übungsblätter sowie aktuelle Informationen unter
http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ss10/dgl.html