Universität Ulm

Freitag, 08.10.2010, 10:00-12:00

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 50

Lösungen Gewöhnliche Differentialgleichungen: Klausur 2

1. Bestimmen Sie die Lösung (in möglichst einfacher Darstellung) folgender Anfangswertprobleme und geben Sie das maximale Lösungsintervall an:

(a) $y'(t) = \sin(t)y(t) + \frac{t}{t^2-1}\mathrm{e}^{-\cos(t)}$, $y(\pi) = 0$; (10)

Lösung: Es ist

$$A(t) := \int_\pi^t \sin(s)\,\mathrm{d}s = -\cos(t) - 1.$$

Somit ergibt die Lösungsformel für lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{A(t)} \int_\pi^t \mathrm{e}^{-A(s)} \frac{s}{s^2-1} \mathrm{e}^{-\cos(s)}\,\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{e}^{-\cos(t)} \int_\pi^t \frac{s}{s^2-1}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\cos(t)} \log\Big(\frac{t^2-1}{\pi^2-1}\Big) \end{aligned}$$

Das maximale Lösungsintervall lässt sich hieraus (und bereits aus der Gleichung selbst) als $I = (1, \infty)$ ablesen.

(b) $y'(t) = 2ty(t)(2 - y(t))$, $y(0) = 1$. (10)

Lösung: Es ist

$$G(z) := \int_1^z \frac{\mathrm{d}r}{r(2-r)} = \frac{1}{2}\int_1^z \Big(\frac{1}{r} + \frac{1}{2-r}\Big)\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\big(\log(z) - \log(2-z)\big) = \frac{1}{2}\log\frac{z}{2-z}$$

für $z \in (0, 2)$ und

$$F(t) = \int_0^t 2s\,\mathrm{d}s = t^2.$$

Laut Lösungsformel ist dann $G(y(t)) = F(t)$, also

$$\frac{y(t)}{2-y(t)} = \mathrm{e}^{2t^2},$$

was sich zu

$$\frac{2}{2-y(t)} = \mathrm{e}^{2t^2} + 1$$

und schließlich zu

$$y(t) = 2 - \frac{2}{\mathrm{e}^{2t^2}+1} = \frac{2\mathrm{e}^{2t^2}}{\mathrm{e}^{2t^2+1}} = \frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2t^2}}$$

vereinfachen lässt. Das maximale Lösungsintervall ist $I = \mathbb{R}$, wie man hieraus erkennen kann oder auch schon an der Gleichung selbst ablesen kann, indem man beobachtet, dass die Lösung $0 < y(t) < 2$ für alle $t \in I$ erfüllen muss.

2. Bestimmen Sie sämtliche reellen Lösungen y der Differentialgleichung

$$y^{(6)}(t) + y^{(5)}(t) - 2y^{(3)}(t) = 12$$

sechster Ordnung! (10)
Tipp: Man kann leicht ein Polynom dritten Grades raten, das die Gleichung löst.

Lösung: Wir bestimmen zuerst sämtliche Lösungen der homogenen Gleichung

$$z^{(6)}(t) + z^{(5)}(t) - 2z^{(3)}(t) = 0.$$

Dazu berechnen wir die Nullstellen des Polynoms $p(x) := x^6 + x^5 - 2x^3 = (x^3 + x^2 - 2)x^3$. Offenbar ist $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ eine dreifache Nullstelle. Die Nullstelle $x_4 = 1$ lässt sich leicht raten. Mit Polynomdivision ergibt sich dann $p(x) = x^3(x-1)(x^2+2x+2)$. Also sind die anderen beiden (komplexen) Nullstellen von p die Zahlen

$$x_{5,6} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i.$$

Laut Vorlesung erhalten wir aus diesen Überlegungen das reelle Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} &z_1(t) = 1, && z_2(t) = t, && z_3(t) = t^2, \\ &z_4(t) = \mathrm{e}^t, && z_5(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin(t), && z_6(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos(t). \end{aligned}$$

Zudem errät man leicht die partikuläre Lösung $y^*(t) := -t^3$ der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist dann laut Vorlesung

$$y(t) = y^*(t) + \sum_{i=1}^{6} c_i z_i(t)$$

für beliebige Zahlen $c_i \in \mathbb{R}$.

3. Wir betrachten eine Versuchsanordnung mit 4 Wassertanks T_1, T_2, T_3 und T_4 mit jeweils 1 Volumeneinheiten Wasser Inhalt. Zu Beginn (Zeitpunkt $t = 0$) ist im Tank T_1 eine Menge von $s_1(0) = 4$ Mengeneinheiten Salz gelöst, während in den übrigen Tanks kein Salz vorhanden ist. Es strömt kontinuierlich Wasser zwischen den Tanks, und zwar in jeder Zeiteinheit je eine Volumeneinheit von T_1 nach T_4, von T_4 nach T_3, von T_3 nach T_2 und von T_2 nach T_1. Man darf davon ausgehen, dass das Salz zu jedem Zeitpunkt innerhalb der einzelnen Tanks homogen verteilt ist. Bestimmen Sie die Salzmengen $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$ und $s_4(t)$ in den einzelnen Tanks zum Zeitpunkt $t \geq 0$ und untersuchen Sie das Langzeitverhalten! (10)
Tipp: $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4 = (\lambda+2)(\lambda^2+2\lambda+2)$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Lösung: Bezeichnet $s_i(t)$ die Salzmenge in Tank T_i zum Zeitpunkt $t \geq 0$, so lässt sich die Versuchsanordnung mittels

$$\begin{aligned} s_1'(t) &= -s_1(t) + s_2(t) \\ s_2'(t) &= -s_2(t) + s_3(t) \\ s_3'(t) &= -s_3(t) + s_4(t) \\ s_4'(t) &= -s_4(t) + s_1(t) \end{aligned}$$

beschreiben, in Matrixschreibweise also als

$$s'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} s(t).$$

Um diese Differentialgleichung zu lösen, bestimmen wir zuerst die Eigenwerte der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom p_A von A ist nach dem Determinantenentwicklungssatz und unter Verwendung des Tipps

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-1-\lambda)^4 - 1 = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda+2)(\lambda^2+2\lambda+2). \end{aligned}$$

Damit erhält man leicht $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ und $\lambda_{3,4} = -1 \pm i$ als Eigenwerte. Die zugehörigen Eigenvektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} \qquad b_4 = \overline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

lassen sich in diesem Beispiel sehr einfach bestimmen (und im Grunde bereits raten), wobei man b_4 im Folgenden nicht einmal benötigt. Man erhält laut Formel aus der Vorlesung

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_1 t} b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} b_2 = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ s_3(t) &= \mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda_3\, t}\big(\cos(t \operatorname{Im}\lambda_3) \operatorname{Re} b_3 - \sin(t \operatorname{Im}\lambda_3) \operatorname{Im} b_3\big) = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \\ s_4(t) &= \mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda_3\, t}\big(\sin(t \operatorname{Im}\lambda_3) \operatorname{Re} b_3 + \cos(t \operatorname{Im}\lambda_3) \operatorname{Im} b_3\big) = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

als ein Fundamentalsystem der Gleichung. Die Lösung des Anfangswertproblems ist von der Form

$$s(t) = c_1 s_1(t) + c_2 s_2(t) + c_3 s_3(t) + c_4 s_4(t)$$

mit reellen Konstanten c_1, c_2, c_3 und c_4. Insbesondere gilt

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = s(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

und somit unter Verwendung des Tipps

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

was man aber ebensogut raten oder selbst rechnen könnte. Die Lösung ist somit

$$\begin{aligned} s_1(t) &= 1 + \mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-t}\cos(t) & s_2(t) &= 1 - \mathrm{e}^{-2t} - 2\mathrm{e}^{-t}\sin(t) \\ s_3(t) &= 1 + \mathrm{e}^{-2t} - 2\mathrm{e}^{-t}\cos(t) & s_4(t) &= 1 - \mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-t}\sin(t). \end{aligned}$$

Also gilt für das Langzeitverhalten

$$\lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \\ s_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

was Konvergenz gegen den Gleichgewichtszustand bedeutet, bei dem in jedem Tank genau eine Mengeneinheit Salz vorhanden ist.

4. Entscheiden Sie (ohne Begründung), ob folgende Aussagen (immer) richtig oder (im Allgemeinen) falsch sind. Kreuzen Sie die entsprechenden Antworten auf der dafür vorgesehenen Seite des Prüfungsbogen an! (10)

(1) Sei $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Die Funktionen $y_1(t) := \mathrm{e}^t$ und $y_2(t) := -\mathrm{e}^t$ seien globale Lösungen von $y'(t) = f(t, y(t))$. Dann besitzt das Anfangswertproblem $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(0) = 0$ eine globale Lösung.

Lösung: Richtig: Sei y die eindeutig bestimmte Lösung des Problems $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(0) = 0$ auf dem maximalen Lösungenintervall I. Weil die Lösung jede kompakte Menge verlässt, gilt entweder $I = \mathbb{R}$ oder es gibt $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{t\to t_0} |y(t)| = \infty$, wobei der Grenzwert links- oder rechtsseitig zu verstehen ist, je nachdem ob t_0 der linke oder rechte Endpunkt von I ist.

Wegen Eindeutigkeit der Lösung können sich aber die Graphen von y, y_1 und y_2 nicht kreuzen, woraus $y_2(t) \le y(t) \le y_1(t)$ für alle $t \in I$ folgt, was die Existenz eines solchen t_0 ausschließt. Es bleibt also nur die Möglichkeit $I = \mathbb{R}$ übrig, was zeigt, dass y eine globale Lösung ist.

(2) Sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar und f' beschränkt (d.h. $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ist für alle i und j eine beschränkte Funktion, wobei f_i die i.te Komponente von f bezeichnet). Dann besitzt das Anfangswertproblem $y'(t) = f(y(t))$, $y(0) = 0$ eine globale Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$.

Lösung: Richtig: Ist die Ableitung f' von f beschränkt, so ist f laut Vorlesung global Lipschitz-stetig. Die Behauptung folgt dann aus dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

(3) Ist 0 der einzige Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, so ist jede Lösung von $y'(t) = Ay(t)$ beschränkt.

Lösung: Falsch: Ein Gegenbeispiel ist $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $y(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$.

(4) Es gibt eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die das Anfangswertproblem $y'(t) = f(y(t))$, $y(0) = 0$ überabzählbar viele Lösungen besitzt.

Lösung: Richtig: Ein Beispiel ist $f(z) = \sqrt{|z|}$, siehe beispielsweise Aufgabe 6 in den Übungen.

(5) Gilt $y_1'(t) = A(t)y_1(t)$ und $y_2'(t) = A(t)y_2(t)$ für eine stetige Funktion $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{4\times 4}$, $y_1, y_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, und sind die Vektoren $y_1(1)$ und $y_2(1)$ linear unabhängig, so sind auch die Vektoren $y_1(0)$ und $y_2(0)$ linear unabhängig.

Lösung: Richtig: Laut Vorlesung gibt es ein Fundamentalsystem $Y(t)$, dessen erste beiden Spalten y_1 und y_2 sind; man muss lediglich die Vektoren $y_1(1)$ und $y_2(1)$ zu einer Basis ergänzen und das zugehörige Fundamentalsystem betrachten. Laut Vorlesung ist dann $Y(t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine reguläre Matrix, wie beispielsweise aus der Theorie der Wronski-Deteminante erhält, und insbesondere sind die ersten beiden Spalten von $Y(0)$, also $y_1(0)$ und $y_2(0)$, linear unabhängig.

Einfacher kann man aber auch damit argumentieren, dass aus $y_1(0) = \lambda y_2(0)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ nach dem Eindeutigkeitssatz und wegen Linearität $y_1 = \lambda y_2$ folgen würde, was der linearen Unabhängigkeit von $y_1(1)$ und $y_2(1)$ widerspräche. Mit dem gleichen Argument kann auch nicht $y_2(0) = \lambda y_1(0)$ gelten. Somit sind $y_1(0)$ und $y_2(0)$ nicht linear abhängig.