Themenvorschläge zum Seminar Funktionalanalysis

(a) Satz von Krein-Smulyan: Eine konvexe Menge $C \subset X'$ ist genau dann σ^*-abgeschlossen, wenn jede der Mengen $C \cap rB_{X'}$, $r > 0$, σ^*-abgeschlossen ist [Meg98, §2.7].

(b) Schauderbasen und die Struktur von c_0, ℓ^p und $L^p(0,1)$: Schauderbasen als richtige Verallgemeinerung der Basis in endlich-dimensionalen Räumen, jeder abgeschlossene Unterraum von c_0 und ℓ^p enthält eine Kopie des Raums, jeder abgeschlossene Unterraum von $L^p(0,1)$ ist entweder isomorph zu ℓ^2 oder enthalten ℓ^p. [LT77, §1.a, §2.a] und [JL01, S.14/15]

(c) Die Approximationseigenschaft: Äquivalenzen zur Eigenschaft, dass jeder kompakte Operator Normgrenzwert von Operatoren endlichen Ranges ist. [LT77, §1.e]

(d) Fredholmoperatoren: Die Spektraltheorie kompakter Operatoren beruht auf der Untersuchung von Operatoren der Form $I - K$, K ein kompakter Operator. Eine natürliche Verallgemeinerung dieser Klasse von Operatoren sind die Fredholmoperatoren, also Operatoren mit endlichdimensionalem Kern und coendlichdimensionalem Bild, also Operatoren, die in gewissem Sinne „fast Isomorphismen“ sind. Es sollen Stabilitätseigenschaften der Klasse der Fredholmoperatoren erarbeitet werden: sie ist offen in den beschränkten Operatoren und invariant unter kompakter Störung. [AA02, §4.4]

(e) Complemented subspace problem: Ist jeder Unterraum eines Banachraums X projezierbar, so ist X isomorph zu einem Hilbertraum. [LT71]

(f) Universalität von $\mathrm{C}[0,1]$ und ℓ^1: Jeder separable Banachraum ist isometrisch zu einem Unterraum von $\mathrm{C}[0,1]$ und zu einem Quotienten von ℓ^1. [AK06, Theorem 1.4.3 und Corollary 2.3.2]

(g) Distributionentheorie: Distributionen sind formal der in der Übung diskutierte Dualraum von $\mathcal{D}(\Omega)$, können aber auch als „verallgemeinerte Funktionen“ interpretiert werden, die einen allgemeineren Ableitungsbegriff und eine Verallgemeinerung der Fouriertransformation erlauben. [Wer05, §VIII.5]

Literatur

[AA02] Y. A. Abramovich and C. D. Aliprantis. *An Invitation to Operator Theory.* AMS, 2002.

[AK06] F. Albiac and N. J. Kalton. *Topics in Banach Space Theory.* Springer, 2006.

[JL01] W. B. Johnson and J. Lindenstrauss. *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, volume 1. Elsevier, 2001.

[LT71] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. On the complemented subspaces problem. *Israel J. Math.*, 9:263–269, 1971.

[LT77] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces I.* Springer, 1977.

[Meg98] R. F. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory.* Springer, 1998.

[Wer05] D. Werner. *Funktionalanalysis.* Springer, 2005.