Robin Nittka
Sommersemester 2011
Punktzahl: 20+5

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 1

1. Sei Ω eine Menge mit unendlich vielen Elementen. Entscheide, welche der folgenden Mengensysteme Topologien auf Ω sind:

(a) $\mathcal{T} = \{O \subset \Omega : O^c \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$. (3)

Lösung: $\mathcal{T}$ ist eine Topologie. Offenbar liegen $\emptyset$ und Ω in $\mathcal{T}$. Ist O_α in $\mathcal{T}$ für alle α, so ist entweder $O_\alpha = \emptyset$ für alle α und somit $\bigcup O_\alpha = \emptyset \in \mathcal{T}$, oder es gibt ein α_0, für das $O_{\alpha_0}^c$ eine endliche Menge ist. In diesem Fall ist auch

$$\left(\bigcup O_\alpha\right)^c = \bigcap O_\alpha^c \subset O_{\alpha_0}^c$$

endlich und somit $\bigcup O_\alpha \in \mathcal{T}$. Sind nun schließlich O_1 und O_2 in $\mathcal{T}$, so ist entweder $O_1 = \emptyset$ oder $O_2 = \emptyset$ oder $(O_1 \cap O_2)^c = O_1^c \cup O_2^c$ als Vereinigung endlicher Mengen endlich. In jedem dieser Fälle gilt $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$.

(b) $\mathcal{T} = \{O \subset \Omega : O^c \text{ höchstens abzählbar}\} \cup \{\emptyset\}$. (3)

Lösung: $\mathcal{T}$ ist eine Topologie. Dies zeigt man genau wie im vorigen Aufgabenteil.

(c) $\mathcal{T} = \{O \subset \Omega : O \text{ unendlich}\} \cup \{\emptyset\}$. (3)

Lösung: $\mathcal{T}$ ist keine Topologie. Ist nämlich O_1 eine unendliche Teilmenge von Ω mit unendlichem Komplement, $x \in O_1$ und $O_2 := O_1^c \cup \{x\}$, so ist O_1 und O_2 in $\mathcal{T}$, aber $O_1 \cap O_2 \notin \mathcal{T}$.

2. Zeige, dass folgende Mengensysteme topologische Basen auf $\mathbb{R}$ sind und vergleiche die erzeugten Topologien bezüglich ihrer Feinheit: (11)

(a) $\mathcal{B}_1 := \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ (*euklidische Topologie*)

(b) $\mathcal{B}_2 := \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ (*Sorgenfrey-Topologie* oder *lower limit topology*)

(c) $\mathcal{B}_3 := \{(a,b) \setminus A : a,b \in \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R} \text{ höchstens abzählbar}\}$

(d) $\mathcal{B}_4 := \{(-\infty,b) : b \in \mathbb{Q}\}$

(e) $\mathcal{B}_5 := \{[a,b) : a,b \in \mathbb{Q}\}$

(f) $\mathcal{B}_6 := \{E^c : E \subset \mathbb{R} \text{ endliche Menge}\}$

Lösung: Alle diese Mengensysteme sind durchschnittsstabil, d.h. für B_1 und B_2 in $\mathcal{B}$ gilt $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$, und überdecken $\mathbb{R}$. Also sind alle diese Mengensysteme Basen einer Topologie.

Wir zeigen, dass $\mathcal{T}_4 \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_5 \subset \mathcal{T}_2$ und $\mathcal{T}_6 \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_3$ gilt, aber keine weiteren Inklusionen gelten, soweit sie nicht mittels Transitivität hieraus folgen.

Wir zeigen zuerst $\mathcal{T}_6 \subsetneq \mathcal{T}_1$. Offenbar ist jede Menge in $\mathcal{B}_6$ eine endliche Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}_1$ und liegt somit in $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}(\mathcal{B}_1)$. Dies zeigt $\mathcal{T}_6 = \mathcal{T}(\mathcal{B}_6) \subset \mathcal{T}_1$. Umgekehrt ist $(0,1) \in \mathcal{B}_1$ nicht als Vereinigung von Komplementen endlicher Mengen darstellbar, da $(0,1)^c$ unendlich viele Elemente hat, was $(0,1) \in \mathcal{T}_1 \setminus \mathcal{T}_6$ zeigt.

Wir zeigen nun $\mathcal{T}_4 \subsetneq \mathcal{T}_1$. Wegen $\mathcal{B}_4 \subset \mathcal{B}_1$ ist $\mathcal{T}_4 \subset \mathcal{T}_1$. Umgekehrt gibt es zu $(0,1) \in \mathcal{B}_1$ kein $b \in \mathbb{R}$ mit $(-\infty,b) \subset (0,1)$, was $(0,1) \in \mathcal{T}_1 \setminus \mathcal{T}_4$ zeigt.

Wir zeigen als nächstes, dass $\mathcal{T}_4$ und $\mathcal{T}_6$ nicht vergleichbar sind. Zum einen kann man $(-\infty,0) \in \mathcal{B}_4$ nicht als Vereinigung von Komplementen endlicher Mengen schreiben, da

$(-\infty,0)^c$ eine unendliche Menge ist, was $(-\infty,0) \in \mathcal{T}_4 \setminus \mathcal{T}_6$ zeigt. Zum anderen gibt es zu $0 \in \{-1,1\}^c$ kein $b \in \mathbb{R}$ mit $0 \in (-\infty,b) \subset \{-1,1\}^c$, was $\{-1,1\}^c \in \mathcal{T}_6 \setminus \mathcal{T}_4$ zeigt.

Wir zeigen nun $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_3$. Aus $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_3$ folgt bereits $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_3$. Für $O := \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{B}_3$ gibt es aber keine Zahlen $a,b \in \mathbb{R}$ mit $0 \in (a,b) \subset O$. Also ist $O \in \mathcal{T}_3 \setminus \mathcal{T}_1$.

Wir zeigen jetzt $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_5$. Sei $(a,b) \in \mathcal{B}_1$ und $x \in (a,b)$. Aus den Grundvorlesungen ist bekannt, dass es dann ein $p \in \mathbb{Q} \cap (a,x)$ und ein $q \in \mathbb{Q} \cap (x,b)$ gibt. Somit ist $x \in [p,q) \subset (a,b)$. Laut Vorlesung zeigt dies $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_5$. Umgekehrt gibt es kein $(a,b) \in \mathcal{B}_1$ mit $0 \in (a,b) \subset [0,1)$, was laut Vorlesung $\mathcal{T}_5 \not\subset \mathcal{T}_1$ zeigt.

Wir zeigen $\mathcal{T}_5 \subsetneq \mathcal{T}_2$. Aus $\mathcal{B}_5 \subset \mathcal{B}_2$ folgt $\mathcal{T}_5 \subset \mathcal{T}_2$. Ist nun $x \in \mathbb{Q}^c$, so gibt es keine Zahlen $a,b \in \mathbb{Q}$ mit $x \in [a,b) \subset [x,x+1)$, was laut Vorlesung $\mathcal{T}_2 \not\subset \mathcal{T}_5$ zeigt.

Wir zeigen nun $\mathcal{T}_5 \not\subset \mathcal{T}_3$. Dies folgt daraus, dass es keine abzählbare Menge $A \subset \mathbb{R}$ und Zahlen $a,b \in \mathbb{R}$ geben kann mit $0 \in (a,b) \setminus A \subset [0,1)$, da in diesem Fall $a < 0$ und $A \supset (a,0)$ gelten müsste im Widerspruch zur Abzählbarkeit von A.

Wir zeigen schließlich $\mathcal{T}_3 \not\subset \mathcal{T}_2$. Dies folgt daraus, dass es keine Zahlen $a,b \in \mathbb{R}$ mit $0 \in [a,b) \subset \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ gibt.

Hinweis: Die Aussagen $\mathcal{T}_3 \not\subset \mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_5 \not\subset \mathcal{T}_1$ hätten eigentlich nicht bewiesen werden müssen, da sie aus $\mathcal{T}_3 \not\subset \mathcal{T}_2 \supset \mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_5 \not\subset \mathcal{T}_3 \supset \mathcal{T}_1$ folgen.

3. Bestimme alle Topologien auf $\Omega = \{1,2,3\}$! (+5)
Tipp: Es gibt genau 29 Topologien auf Ω. Es ist also hilfreich, bei der Auflistung systematisch vorzugehen.

Lösung: Es gibt insgesamt 29 Topologien auf Ω. Wir ordnen diese nach Anzahl ihrer Elemente. Hierbei bezeichnen a, b und c immer paarweise verschiedene Elemente von Ω.

- bis zu 2 Elemente (1 Topologie): Nur $\{\emptyset,\Omega\}$, da jede Topologie diese Mengen enthält.
- 3 Elemente (6 Topologien): Die Menge $\{\emptyset,\Omega\}$ kann um eine beliebige weitere Teilmenge von Ω ergänzt werden, und man erhält stets eine Topologie. Da es insgesamt acht Teilmengen gibt, kommen so weitere sechs Topologien zustande. Je nach Elementanzahl der zusätzlichen Menge sind die Topologien echt verschieden oder nicht.
- 4 Elemente (9 Topologien): Hier gibt es die drei Topologien der Form $\{\emptyset,\Omega,\{a\},\{b,c\}\}$ und die sechs Topologien der Form $\{\emptyset,\Omega,\{a\},\{a,b\}\}$. Es kann keine Topologien mit 4 Elementen geben, die zwei einelementige oder zwei zweielementige Mengen enthalten. Im ersten Fall läge die Vereinigung dieser beiden Mengen nicht in der Topolgie, im zweiten ihr Durchschnitt.
- 5 Elemente (6 Topologien): Es gibt hier drei Topologien der Form $\{\emptyset,\Omega,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ und drei Topologien der Form $\{\emptyset,\Omega,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$. Man kann man nicht drei einelementige Mengen oder drei zweielementige Mengen haben; in diesem Fall wären nämlich alle Teilmengen von Ω enthalten, also acht Stück. Legt man sich nun entweder auf zwei einelementige oder auf zwei zweielementige Mengen fest, so ist die verbleibende Menge dadurch bereits eindeutig bestimmt.
- 6 Elemente (6 Topologien): Es gibt sechs Topologien mit sechs Elementen, die man als $\{\emptyset,\Omega,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\}\}$ schreiben kann. Weitere Topologien mit sechs Elementen gibt es nicht. Wie im letzten Teil hat man nämlich zwangsläufig genau zwei einelementige und genau zwei zweielementige Mengen. Nennt man nun die beiden einelementigen Mengen $\{a\}$ und $\{b\}$, so ist sicherlich auch $\{a,b\}$ enthalten. Nimmt man nun eine der beiden verbleibenden zweielementigen Mengen hinzu, so ist die Topologie bis auf Umbenennung von obiger Form.
- 7 Elemente (0 Topologien): Hat man alle drei einelementigen Mengen oder alle drei zweielementigen Mengen in der Topologie, so enthält die Topologie bereits alle Teilmengen von Ω, hätte also acht Elemente.

- 8 Elemente (1 Topologie): Es gibt nur ein Mengensystem mit acht Elementen, nämlich $\mathcal{P}(\Omega)$, und dieses ist eine Topologie.

In obiger Aufzählung haben wir die Topologien bereits in sogenannte *Homöomorphieklassen* sortiert, also in Gruppen, innerhalb derer die Topologien durch Umbenennung auseinander hervorgehen. Nur bei den drei-, vier- und fünfelementigen Topologien gab es zwei Typen. Insgesamt kann man eine dreielementige Menge also auf genau 9 tatsächlich voneinander verschiedene Arten mit einer Topologie versehen.