Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 10.05.2011

Robin Nittka

Sommersemester 2011

Punktzahl: 20

Elemente der Topologie: Blatt 3

6. Entscheide für jede Topologie aus Aufgabe 2, ob alle endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$ abgeschlossen sind und ob $\mathbb{R}$ mit dieser Topologie ein Hausdorff-Raum ist! (4)
Tipp: Es hilft, die Ergebnisse aus Aufgabe 2 über die Feinheit der Topologien zu benutzen.

7. Sei $\Omega = \mathbb{R}$ mit der von $\mathcal{B}_6$ aus Aufgabe 2 erzeugten Topologie (der *kofinalen Topologie*) versehen. Für eine Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ definieren wir $\operatorname{Lim} x_n \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : x_n \to x\}$. Zeige:

(a) Es gibt eine Folge (x_n) mit $\operatorname{Lim} x_n = \mathbb{R}$. (2)

(b) Es gibt eine Folge (x_n) mit $\operatorname{Lim} x_n = \emptyset$. (2)

(c) Für alle Folgen (x_n) gilt entweder $\operatorname{Lim} x_n = \mathbb{R}$ oder $\operatorname{Lim} x_n = \emptyset$ oder $\operatorname{Lim} x_n = \{x\}$ für ein $x \in \mathbb{R}$. (4)

8. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $f : \mathbb{R} \to M$ eine Funktion. Fassen wir $\mathbb{R}$ mit der üblichen Ordnung als eine gerichtete Menge auf, so ist f ein Netz in M. Zeige, dass für $x \in M$ folgende Aussagen äquivalent sind: (4)

(i) $\lim_{t\to\infty} f(t) = x$ im Sinne der Analysis, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $d(f(t), x) < \varepsilon$ für alle $t \geq t_0$.

(ii) f konvergiert gegen x im Sinne der Netzkonvergenz.

(iii) Für jede Folge $(t_n) \subset \mathbb{R}$ mit $t_n \to \infty$ gilt $f(t_n) \to x$.

9. Sei Ω ein topologischer Raum und $x \in \Omega$. Ein Mengensystem $\mathcal{B}(x)$ heißt *Umgebungsbasis von x*, falls $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ gilt und es zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $B \in \mathcal{B}(x)$ gibt mit $B \subset U$. Zeige:

(a) Ist $\mathcal{B}$ eine Basis von Ω, so ist $\mathcal{B}(x) \coloneqq \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ eine Umgebungsbasis von x. (2)

(b) Kommt die Topologie auf Ω von einer Metrik d, so ist $\mathcal{B}(x) \coloneqq \{B(x, r) : r \in \mathbb{Q}_+\}$ eine Umgebungsbasis von x, wobei wie üblich $B(x, r) \coloneqq \{y \in \Omega : d(x, y) < r\}$ sei. (2)