Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 17.05.2011

Robin Nittka
Sommersemester 2011
Punktzahl: 20+5

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 4

10. Sei Ω ein topologischer Raum mit einer Basis $\mathcal{C}$. Zeige:

(a) Besitzt $x \in \Omega$ eine abzählbare Umgebungsbasis, so gibt es eine abzählbare Teilmenge von $\mathcal{C}$, die eine Umgebungsbasis von x ist. (4)

Lösung: Sei $\mathcal{B}(x) = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $C_n \in \mathcal{C}$ mit $x \in C_n \subset B_n$, da B_n eine Umgebung von x ist. Wir zeigen, dass $\mathcal{C}(x) \coloneqq \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von x ist. Einerseits ist $\mathcal{C}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ klar, da jedes C_n eine offene Umgebung von x ist. Sei nun $U \in \mathcal{U}(x)$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $B_n \subset U$ nach Wahl von $\mathcal{B}(x)$. Aber dann gilt auch $C_n \subset U$ nach Wahl von C_n.

(b) Erfüllt Ω das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so gibt es eine abzählbare Teilmenge von $\mathcal{C}$, die eine Basis der Topologie von Ω ist. (4)
Tipp: Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Basis von Ω. Betrachte Mengen $C_{m,n}$ mit $B_m \subset C_{m,n} \subset B_n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$, für die eine solche Menge $C_{m,n}$ existiert. Verwende dann Satz 2.3.

Lösung: Sei $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis. Wie im Tipp wählen wir $C_{m,n} \in \mathcal{C}$ mit $B_m \subset C_{m,n} \subset B_n$ für alle m und n, für die eine solche Menge existiert. Wir zeigen, dass $\mathcal{C}' \coloneqq \{C_{m,n}\}$ eine Basis ist, womit die Behauptung bewiesen ist. Nach Satz 2.3 müssen wir nur zeigen, dass es zu jeder offenen Menge O und zu jedem $x \in O$ ein $C_{m,n}$ gibt mit $x \in C_{m,n} \subset O$. Sei also O offen und $x \in O$. Dann gibt es $B_n \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_n \subset O$, weil $\mathcal{B}$ eine Basis ist. Da $\mathcal{C}$ eine Basis ist, gibt es $C \in \mathcal{C}$ mit $x \in C \subset B_n$. Und nun gibt es wiederum $B_m \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_m \subset C \subset B_n$. Also existiert nach Definition auch eine Menge $C_{m,n} \in \mathcal{C}'$ mit $x \in B_m \subset C_{m,n} \subset B_n \subset O$. Dies war zu zeigen.

11. Untersuche für jede Topologie aus Aufgabe 2, ob das erste und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist und ob der Raum separabel ist! (12)
Tipp: Aufgabe 10 kann hier helfen, insbesondere bei der Untersuchung von $\mathcal{T}(\mathcal{B}_3)$.

Lösung: Die euklidische Topologie $\mathcal{T}_1$ ist metrisch. Da $\mathbb{Q}$ in dieser Topologie dicht in $\mathbb{R}$ liegt, ist der Raum auch separabel. Laut Vorlesung ist dann auch das zweite und somit insbesondere das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

In der Sorgenfrey-Topologie $\mathcal{T}_2$ ist ebenfalls $\mathbb{Q}$ dicht, da jede nicht-leere Basismenge $[a, b)$ eine rationale Zahl enthält. Eine abzählbare Umgebungsbasis von x ist durch $\mathcal{B}(x) \coloneqq \{[x, x + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ gegeben, da offenbar jede Basismenge, die x enthält, auch eine Menge dieser Form enthält. Also ist das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Wir zeigen, dass das zweite Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllt ist. Angenommen, es wäre erfüllt. Dann gibt es nach Aufgabe (10) eine Basis der Form $\{[a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Wähle nun $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist die Menge $[x, x + 1)$ offen, aber es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in [a_n, b_n) \subset [x, x + 1)$, ein Widerspruch.

Die von den Basismengen $(a, b) \setminus A$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}_3$ ist nicht separabel, denn ist $M \subset \mathbb{R}$ abzählbar, so ist M abgeschlossen und damit insbesondere nicht dicht. Wir zeigen, dass $\mathcal{T}_3$ das erste und somit auch das zweite Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllt. Anderenfalls gäbe es nämlich nach Aufgabe 10 zu jedem $x \in \mathbb{R}$ eine Umgebungsbasis der Form $\mathcal{B}(x) = \{(a_n, b_n) \setminus A_n\}$. Wähle eine Folge (y_k) mit $y_k \notin \bigcup_n A_n \cup \{x\}$ und $|y_k - x| < \frac{1}{k}$.

Eine solche Folge gibt es, da jeder Intervall der Form $(x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k})$ überabzählbar viele Punkte enthält und A abzählbar ist. Zu $B := \{y_k : k \in \mathbb{N}\}$ ist dann $\mathbb{R} \setminus B$ eine offene Umgebung von x. Es gibt aber keine Menge $(a_n, b_n) \setminus A_n \in \mathcal{B}(x)$ mit $(a_n, b_n) \setminus A_n \subset \mathbb{R} \setminus B$, denn es gibt k mit $y_k \in (a_n, b_n)$, also $y_k \in (a_n, b_n) \setminus A_n$, aber $y_k \notin \mathbb{R} \setminus B$. Also ist $\mathcal{B}(x)$ keine Umgebungsbasis von x.

Die von $\mathcal{B}_4 = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{Q}\}$ erzeugte Topologie erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, erfüllt also auch das erste und ist separabel, da $\mathcal{B}_4$ selbst bereits abzählbar ist. Für $\mathcal{B}_5 = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$ ist dieses Argument ebenfalls richtig.

Die von $\mathcal{B}_6 = \{E^c : E \text{ endlich}\}$ erzeugte Topologie ist separabel, da sogar jede nicht-endliche Menge dicht ist. Wäre das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, so gäbe es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ eine Umgebungsbasis der Form $\mathcal{B}(x) = \{E_n^c : n \in \mathbb{N}\}$. Wähle $y \notin \bigcup_n E_n \cup \{x\}$. Dann ist $\{y\}^c$ eine offene Umgebung von x, die keine der Mengen E_n^c enthält, da ja $E_n^c \subset \{y\}^c$ äquivalent zu $y \in E_n$ ist. Also erfüllt $\mathcal{T}_6$ weder das erste noch das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Bemerkung: Wie der Vergleich der Topologie $\mathcal{T}_1$ mit $\mathcal{T}_2$ und $\mathcal{T}_6$ zeigt, übertragen sich die Abzählbarkeitsaxiome nicht automatisch auf feinere bzw. gröbere Topologien. Separabilität bleibt hingegen unter Vergröberung der Topologie erhalten, wie man leicht sieht.

12. Sei Ω ein topologischer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, und sei $M \subset \Omega$. Zeige:

(a) M besitzt höchstens abzählbar viele isolierte Punkte. (+4)

Lösung: Sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis. Für jeden isolierten Punkt $x \in M \setminus M'$ von M gibt es nach Definition eine Umgebung $U_x \in \mathcal{U}(x)$ mit $U_x \cap M = \{x\}$. Wähle $B_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_x \subset U$. Dann ist $B_x \cap M = \{x\}$. Insbesondere ist $B_x \neq B_y$ für isolierte Punkte $x \neq y$ von M. Da aber $\mathcal{B}$ nur abzählbar viele Elemente hat, kann die Menge der isolierten Punkte von M somit höchstens abzählbar sein.

(b) Ist M überabzählbar, so ist M' überabzählbar. (+1)

Lösung: Im vorigen Aufgabenteil haben wir gezeigt, dass $M \setminus M'$ abzählbar ist. Weil $M = (M \setminus M') \cup (M \cap M')$ nach Voraussetzung überabzählbar ist, muss nun also $M \cap M'$ überabzählbar sein. Insbesondere ist M' überabzählbar.