Robin Nittka
Sommersemester 2011
Punktzahl: 20+5

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 5

13. Seien X und Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ stetig. Es sei X separabel und f surjektiv. Zeige, dass dann auch Y separabel ist! (2)

Lösung: Sei $M \subset X$ abzählbar und dicht. Dann ist auch $f(M)$ abzählbar, und nach Satz 6.4 gilt $Y = f(X) = f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$, was zeigt, dass $f(M)$ in Y dicht ist. Also ist Y separabel.

14. Seien X und Y topologische Räume, wobei Y die Hausdorff-Eigenschaft habe. Sei M eine dichte Teilmenge von X und $f\colon M \to Y$ eine Funktion. Zeige, dass es dann höchstens eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}\colon X \to Y$ von f gibt, also höchstens eine stetige Funktion $\tilde{f}\colon X \to Y$ mit $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in M$! (2)

Lösung: Seien g und h stetige Funktionen von X nach Y mit $g(x) = f(x) = h(x)$ für alle $x \in M$. Sei $y \in X$ beliebig. Wegen $y \in \overline{M}$ gibt es ein Netz (x_i) in M mit $x_i \to y$. Wegen Stetigkeit folgt dann $g(y) \leftarrow g(x_i) = h(x_i) \to h(y)$. Weil Grenzwerte in Y eindeutig sind, erhalten wir $g(y) = h(y)$ für alle $y \in X$, was die Behauptung zeigt.

15. Sei $\mathcal{T}_e$ die euklidische Topologie und $\mathcal{T}_\ell$ die Sorgenfrey-Topologie. Zeige, dass eine Funktion $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{T}_\ell) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ genau dann stetig ist, wenn sie im Sinne der Analysis rechtsseitig stetig ist! (4)
Hinweis: Wir nennen f *rechtsseitig stetig im Sinne der Analysis*, wenn für jedes $t \in \mathbb{R}$ und jede monoton fallende Folge (t_n) mit $t_n \to t$ (im Sinne der euklidischen Topologie) $f(t_n) \to f(t)$ (im Sinne der euklidischen Topologie) gilt.

Lösung: Sei f stetig im Sinne der Topologien und sei (t_n) eine fallende Folge mit Grenzwert t. Dann konvergiert (t_n) in der Sorgenfrey-Topologie gegen t und somit folgt $f(t_n) \to f(t)$ aus der Folgenstetigkeit von f.

Sei nun f unstetig im Sinne der Topologien. Dann gibt es $t \in \mathbb{R}$ und eine Umgebung U von $f(t)$ mit der Eigenschaft, dass $f^{-1}(U)$ keine Umgebung von t ist im Sinne der Sorgenfrey-Topologie. Induktiv finden wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $t_n \in [t, t_{n-1}) \cap [t, t + \frac{1}{n})$ mit $f(t_n) \notin U$. Beachte hierbei, dass $[t, t_n)$ nicht leer sein kein, weil wegen $f(t) \in U$ offenbar $t_n \neq t$ ist. Dann ist (t_n) monoton fallend und konvergiert in der euklidischen Topologie gegen t, aber es gilt nicht $f(t_n) \to f$.

16. Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum und $M \subset X$. Die Topologie $\mathcal{T}_M \coloneqq \{O \cap M : O \in \mathcal{T}_X\}$ heißt *Spurtopologie* oder *Relativtopologie* von M bezüglich X. Zeige:

(a) Seien $(A_k)_{k=1}^n$ abgeschlossene Teilmengen von X mit $\bigcup_{k=1}^n A_k = X$ und sei Y ein topologischer Raum. Für jedes k sei $f_k\colon A_k \to Y$ eine bezüglich der Spurtopologie auf A_k stetige Funktion. Es gelte $f_k(x) = f_\ell(x)$ für $x \in A_k \cap A_\ell$. Dann gibt es genau eine stetige Funktion $f\colon X \to Y$ mit $f(x) = f_k(x)$ für alle $x \in A_k$. (5)
Bemerkung: Dies ist eine abstrakte Version der Überlegungen, die man anstellt, wenn man nachprüft, dass eine stückweise definierte Funktion stetig ist.

Lösung: Es ist nur zu zeigen, dass die durch $f(x) \coloneqq f_k(x)$ für $x \in A_k$ definierte Funktion stetig ist. Sei dazu $B \subset Y$ abgeschlossen. Dann ist $f_k^{-1}(B)$ abgeschlossen in der Spurtopologie von A_k, also

$$f_k^{-1}(B) = A_k \setminus (O_k \cap A_k) = A_k \setminus O_k = A_k \cap O_k^c$$

für eine offene Menge O_k in X. Somit ist $f_k^{-1}(B)$ auch als Teilmenge von X abgeschlossen, was zeigt, dass die Menge

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{k=1}^{n} f_k^{-1}(B)$$

abgeschlossen ist. Dies ist die Stetigkeit von f.

(b) Die Aussage des vorigen Aufgabenteils wird falsch, wenn man abzählbar unendlich viele Mengen $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ zulässt. (2)

Lösung: Betrachte $X := \mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie. Setze $f(x) := 0$ für $x \in (-\infty, 0]$ und $f(x) := 1$ für $x \in (0, \infty)$. Wir definieren $A_0 := (-\infty, 0]$ und $A_k := [\frac{1}{k}, \infty)$. Dann ist A_k abgeschlossen mit $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = X$ und $f_k := f|_{A_k}$ ist konstant und somit stetig. Die einzige Funktion, die auf jeder Menge A_k mit der zugehörigen Funktion f_k übereinstimmt, ist f. Aber f ist unstetig bezüglich der euklidischen Topologie.

(c) Seien $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann ist die Funktion $f \wedge g$, die durch durch $(f \wedge g)(x) := f(x) \wedge g(x) := \min\{f(x), g(x)\}$ definiert ist, ebenfalls stetig. (5)
Tipp: Zeige, dass $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ abgeschlossen ist!
Hinweis: Die Aussage, dass $f - g$ stetig ist, steht noch nicht zur Verfügung, wird aber zur Lösung der Aufgabe auch nicht zwingend benötigt.

Lösung: Die Menge

$$\{f(x) > g(x)\} = \bigcup_{c \in \mathbb{R}} \{f(x) > c > g(x)\} = \bigcup_{c \in \mathbb{R}} \left(f^{-1}((c, \infty)) \cap g^{-1}((-\infty, c))\right)$$

ist offen. Also sind die Mengen $A := \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ und (analog dazu) $B := \{x \in X : f(x) \geq g(x)\}$ abgeschlossen. Auf A stimmt die Funktion $f \wedge g$ mit f überein, während sie auf B mit g übereinstimmt. Wir zeigen nun, dass Einschränkungen stetiger Funktionen stetig bezüglich der Spurtopologie sind, woraus die Stetigkeit von $f \wedge g$ auf A und B folgt, nach dem ersten Aufgabenteil also die Stetigkeit von $f \wedge g$ auf X.

Sei dazu h eine auf X stetige Funktion und M eine Teilmenge von X. Sei (x_i) ein in der Spurtopologie von M gegen ein $x \in M$ konvergentes Netz. Dann konvergiert (x_i) auch als Netz in X gegen x, woraus $f(x_i) \to f(x)$ folgt. Dies zeigt, dass die Einschränkung $f|_M\colon M \to \mathbb{R}$ stetig in der Spurtopologie ist.

17. Zeige, dass es eine folgenstetige Funktion gibt, die nicht stetig ist! (+5)

Lösung: Sei $M := \{u \in \mathbb{R}^{[0,1]} : u(t) \neq 0$ für höchstens abzählbar viele $t \in [0,1]\}$ und $X := M \cup \{\mathbb{1}_{[0,1]}\}$ mit der Spurtopologie bezüglich $\mathbb{R}^{[0,1]}$ versehen. Wir definieren $f\colon X \to \mathbb{R}$ durch $f(\mathbb{1}_{[0,1]}) := 1$ und $f(u) := 0$ für $u \in M$.

Wir zeigen, dass f folgenstetig ist. Laut Vorlesung ist M in $\mathbb{R}^{[0,1]}$ und somit auch in X folgenabgeschlossen. Die Menge $\{\mathbb{1}_{[0,1]}\}$ ist in $\mathbb{R}^{[0,1]}$ sogar abgeschlossen und somit insbesondere folgenabgeschlossen in X. Ist nun (u_n) eine Folge in X, die gegen ein $u \in X$ konvergiert, so kann es nicht gleichzeitig eine Teilfolge von (u_n) in M und eine Teilfolge von (u_n) in $\{\mathbb{1}_{[0,1]}\}$ geben, da dann u wegen Folgenabgeschlossenheit im Schnitt dieser Mengen liegen müsste, der allerdings leer ist. Also ist entweder $u_n \in M$ für alle bis auf endlich viele n und $u \in M$ oder $u_n = \mathbb{1}_{[0,1]}$ für alle bis auf endlich viele n und $u = \mathbb{1}_{[0,1]}$. In beiden Fällen ist $f(u_n) \to f(u)$ trivialerweise erfüllt.

Wir zeigen nun, dass f unstetig ist. Laut Vorlesung ist $\overline{M} = \mathbb{R}^{[0,1]}$. Also gibt es ein Netz (u_i) in M, das in $\mathbb{R}^{[0,1]}$ gegen $\mathbb{1}_{[0,1]}$ konvergiert. Dann konvergiert (u_i) auch in X gegen $\mathbb{1}_{[0,1]}$, aber offenbar gilt $f(u_i) = 0 \not\to 1 = f(\mathbb{1}_{[0,1]})$. Also ist f nicht (netz-)stetig.

Weitere Lösungen:

- In der Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{B}_3)$ aus Aufgabe 2 konvergiert eine Folge nur, wenn sie schließlich konstant ist. Also ist jede Funktion auf $\mathcal{T}(\mathcal{B}_3)$ folgenstetig. Die Identität von $(\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathcal{B}_3))$ nach $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist also eine unstetige folgenstetige Funktion.
- Ein natürlicheres, aber komplizierteres Beispiel stammt aus der Funktionalanalysis. Die Norm auf ℓ^1 ist eine unstetige folgenstetige Funktion von ℓ^1 versehen mit der schwachen Topologie nach $\mathbb{R}$ versehen mit der euklidischen Topologie. Nach dem Satz von Schur ist nämlich jede schwach konvergente Folge normkonvergent. Aber die Einheitskugel von ℓ^1, also das Urbild von $(-\infty, 1)$, ist nicht offen in der schwachen Topologie, da eine nicht-leere schwach offene Menge stets einen unendlich-dimensionalen Unterraum enthält.
- Ist X ein Banachraum, so ist jeder kompakte Operator folgenstetig von X mit der schwachen Topologie in die Normtopologie von X. Die einzigen stetigen Operatoren bezüglich dieser Topologien sind aber die beschränkten Operatoren von endlichem Rang.