Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 31.05.2011

Robin Nittka
Sommersemester 2011
Punktzahl: 20+5

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 6

18. Sei X eine nicht-leere Menge und $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge topologischer Räume, die jeweils das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ sei eine Funktion $f_k\colon X \to Y_k$ gegeben. Wir versehen X mit der von $\mathcal{F} := \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ rückwärts induzierten Topologie. Zeige, dass X dann das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt! (5)

Lösung: Sei $x \in X$ beliebig, und sei $\mathcal{B}_k(f_k(x))$ jeweils eine abzählbare Umgebungsbasis von $f_k(x)$ in Y_k. Dann ist die Menge

$$\mathcal{B}(x) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big\{ \bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}(B_k) : B_k \in \mathcal{B}_k(f_k(x)) \Big\}$$

abzählbar als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen. Wir zeigen, dass $\mathcal{B}(x)$ eine Umgebungsbasis von x ist.

Da f_k stetig ist, ist $f_k^{-1}(B_k)$ für jedes $B_k \in \mathcal{B}_k(f_k(x))$ eine Umgebung von x. Also ist auch der Durchschnitt $\bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}(B_k)$ eine Umgebung von x, was $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ zeigt.

Sei nun U eine beliebige Umgebung von x. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ und offene Mengen $O_k \subset Y_k$ mit

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}(O_k) \subset U,$$

da die Mengen dieser Form laut Vorlesung eine Basis von X bilden. Insbesondere ist $f_k(x) \in O_k$ für $1 \le k \le n$ und somit $O_k \in \mathcal{U}(f_k(x))$. Wähle jeweils ein $B_k \in \mathcal{B}_k(f_k(x))$ mit $f_k(x) \in B_k \subset O_k$. Dann ist

$$x \in B := \bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}(B_k) \subset \bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}(O_k) \subset U$$

und $B \in \mathcal{B}(x)$. Somit ist $\mathcal{B}(x)$ tatsächlich eine Umgebungsbasis von x.

19. Sei Y eine nicht-leere Menge und $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Zu jedem $\alpha \in I$ sei eine Funktion $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y$ gegeben. Zeige:

(a) Es gibt eine eine feinste Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ auf Y, bezüglich der jede der Funktionen f_α stetig ist. (5)
Tipp: Man zeige, dass $\mathcal{T}(\mathcal{F}) = \{O \subset Y : f_\alpha^{-1}(O) \text{ offen für alle } \alpha \in I\}$ gilt.
Bezeichnung: Diese Topologie heißt *von $\mathcal{F} := \{f_\alpha : \alpha \in I\}$ vorwärts induzierte Topologie* oder *Finaltopologie bezüglich $\mathcal{F}$*.

Lösung: Wir zeigen, dass

$$\mathcal{T}(\mathcal{F}) := \{O \subset Y : f_\alpha^{-1}(O) \text{ offen in } X_\alpha \text{ für alle } \alpha \in I\}$$

eine Topologie auf Y definiert. Es ist klar, dass $\emptyset$ und Y in $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ liegen. Sind O_β Mengen in $\mathcal{T}(\mathcal{F})$, so ist für jedes $\alpha \in I$

$$f_\alpha^{-1}\Big(\bigcup_\beta O_\beta\Big) = \bigcup_\beta f_\alpha^{-1}(O_\beta)$$

offen in X_α, was $\bigcup_\beta O_\beta \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ zeigt. Analog dazu sieht man $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ für O_1 und O_2 in $\mathcal{F}(\mathcal{T})$. Nach Definition von $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ ist zudem klar, dass jede der Funktionen f_α bezüglich dieser Topologie stetig ist.

Sei nun $\mathcal{T}$ eine weitere Topologie auf Y, bezüglich der jede der Funktionen f_α stetig ist. Für $O \in \mathcal{T}$ ist dann wegen Stetigkeit $f_\alpha^{-1}(O)$ offen für alle $\alpha \in I$. Nach Definition ist dann $O \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$. Wir haben $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(\mathcal{F})$ gezeigt, also dass $\mathcal{T}$ gröber ist als $\mathcal{T}(\mathcal{F})$.

(b) Eine Funktion $g\colon Y \to Z$ in einen topologischen Raum Z ist genau dann stetig bezüglich $\mathcal{T}(\mathcal{F})$, wenn $g \circ f_\alpha\colon X_\alpha \to Z$ für jedes $\alpha \in I$ eine stetige Funktion ist. (5)

Lösung: Ist g stetig, so sind die Funktionen $g \circ f_\alpha$ stetig als Verkettungen stetiger Funktionen.

Sei nun $g \circ f_\alpha$ stetig für alle $\alpha \in I$. Sei $O \subset Z$ offen. Dann ist $(g \circ f_\alpha)^{-1}(O) = f_\alpha^{-1}(g^{-1}(O))$ offen in X_α für alle $\alpha \in I$, was nach dem ersten Aufgabenteil zeigt, dass $g^{-1}(O)$ in Y offen ist. Also ist g stetig.

(c) Setze $R \coloneqq \bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha(X_\alpha)$. Dann ist die Spurtopologie von $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ auf $Y \setminus R$ die diskrete Topologie. (5)

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, dass der Fall $R \neq Y$ uninteressant ist. Viele Autoren fordern daher $R = Y$ in der Definition der Finaltopologie.

Lösung: Wir zeigen, dass jede Teilmenge von $Y \setminus R$ in der Spurtopologie offen ist. Sei also $M \subset Y \setminus R$. Dann ist $f_\alpha^{-1}(M) = \emptyset$ für alle $\alpha \in I$ nach Definition von R. Also ist M offen in Y und somit insbesondere offen in der Spurtopologie.

Zusatzinformation: Ist X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, so heißt die von $x \mapsto [x]_\sim$ auf $X/\sim$ vorwärts induzierte Topologie die *Quotiententopologie*. Beispiel: $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist homöomorph zur Einheitskreislinie versehen mit der Spurtopologie bezüglich $\mathbb{R}^2$.

20. (a) Zeige, dass auf $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, die Produkttopologie als Produkt $\mathbb{R}^N = \prod_{k=1}^N \mathbb{R}$ mit der euklidische Topologie zusammenfällt! (+2)

Lösung: Es ist einfach zu sehen und aus den Grundvorlesungen bekannt, dass eine Folge in $\mathbb{R}^N$ genau dann bezüglich der euklidischen Topologie gegen einen Punkt konvergiert, wenn sie koordinatenweise gegen den Punkt konvergiert, also genau dann, wenn sie in der Produkttopologie gegen den Punkt konvergiert. Also sind die folgenabgeschlossenen Mengen in beiden Räumen dieselben. Da beide Räume das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, haben sie somit die gleichen abgeschlossenen Mengen, tragen also dieselbe Topologie.

(b) Seien X ein topologischer Raum und f und g stetige Funktionen von X nach $\mathbb{R}$. Zeige, dass dann auch die Funktionen $f + g$ und $f - g$ stetig sind! (+3)

Lösung: Die Funktion $x \mapsto (f(x), g(x))$ von X nach $\mathbb{R}^2$ ist laut Vorlesung stetig bezüglich der Produkttopologie, da sie koordinatenweise stetig ist. Es genügt also zu zeigen, dass die Abbildungen $(x, y) \mapsto x \pm y$ stetig von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ sind. Aus den Abschätzungen

$$\begin{aligned}|(x \pm y) - (x_0 \pm y_0)| &\leq |x - x_0| + |y - y_0| \leq 2\max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} \\ &\leq 2\sqrt{\max\{|x - x_0|^2, |y - y_0|^2\}} \leq 2\sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2}\end{aligned}$$

ergibt sich mit dem ε-δ-Kriterium, dass Addition und Subtraktion stetig bezüglich der euklidischen Topologie sind. Aus dem vorigen Aufgabenteil folgt somit die Behauptung.