Robin Nittka
Sommersemester 2011
Punktzahl: 20+5

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 7

21. Seien X und Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Wir versehen den *Graphen* $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\}$ von f mit der Spurtopologie des Produktraums $X \times Y$. Sei π die Einschränkung der Projektion in die erste Koordinate auf $G(f)$, also $\pi((x, f(x))) := x$. Zeige:

(a) π ist bijektiv und stetig. (3)

Lösung: Die Bijektivität ist offensichtlich. Nach Definition der Produkttopologie ist die Projektion $\pi_1\colon X \times Y \to X$, $(x, y) \mapsto x$ stetig. Daher ist $\pi^{-1}(O) = \pi_1^{-1}(O) \cap G(f)$ offen in $G(f)$ für jede offene Menge $O \subset X$, was die Stetigkeit von π zeigt.

(b) π ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn f stetig ist. (3)

Lösung: π ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn die Umkehrabbildung $x \mapsto (x, f(x))$ stetig ist, was laut Vorlesung äquivalent dazu ist, dass die Abbildung komponentenweise stetig ist. Da die Identität stets eine stetige Abbildung ist, ist dies äquivalent zur Stetigkeit von f.

(c) Sei Y ein Hausdorff-Raum. Ist f stetig, so ist $G(f)$ abgeschlossen. (3)

Lösung: Sei f stetig. Fixiere ein Netz (x_i, y_i) in $G(f)$, also $y_i = f(x_i)$, das gegen einen Punkt $(x, y) \in X \times Y$ konvergiert. Dann gilt $x_i \to x$ und $y_i \to y$, und wegen Stetigkeit von f auch $f(x_i) \to f(x)$. Weil in Hausdorff-Räumen Grenzwerte eindeutig bestimmt sind, folgt $y = f(x)$, was $(x, y) = (x, f(x)) \in G(f)$ zeigt. Wir haben bewiesen, dass $G(f)$ (netz-)abgeschlossen ist.

(d) Es gibt Hausdorff-Räume X und Y und eine unstetige Funktion $f\colon X \to Y$, für die $G(f)$ abgeschlossen ist. (3)

Lösung: Wähle $X := Y := \mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie und $f(x) := \frac{1}{x} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$.

22. Zeige, dass ein topologischer Raum X genau dann ein Hausdorff-Raum ist, wenn die Diagonale $\Delta := \{(x, x) : x \in X\}$ im Produktraum $X \times X$ abgeschlossen ist! (4)

Lösung: Sei X ein Hausdorff-Raum. Da die Identität stetig ist, ist Δ nach der vorigen Aufgabe abgeschlossen.

Sei nun Δ abgeschlossen und somit Δ^c offen. Für Punkte $x \neq y$ in X gilt $(x, y) \in \Delta^c$. Es gibt also offene Mengen O_1 und O_2 in X mit $(x, y) \in O_1 \times O_2 \subset \Delta^c$. Das bedeutet $x \in O_1$, $y \in O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, womit die Hausdorff-Eigenschaft nachgewiesen ist.

23. Sei X ein topologischer Raum, in dem jedes Netz höchstens einen Grenzwert besitzt. Zeige, dass X ein Hausdorff-Raum ist! (4)
Bemerkung: Die Umkehrung dieser Aussage wurde bereits in der Vorlesung bewiesen.

Lösung: Sei X kein Hausdorff-Raum, also die Diagonale Δ nicht abgeschlossen in $X \times X$. Wähle $(x, y) \in \overline{\Delta} \setminus \Delta$. Dann ist $x \neq y$ und es gibt ein Netz (x_i) in X mit $(x_i, x_i) \to (x, y)$, was $x_i \to x$ und $x_i \to y$ bedeutet. Dieses Netz (x_i) hat somit zwei unterschiedliche Grenzwerte.

24. Sei X ein kompakter topologischer Raum, I eine gerichtete Menge, und für jedes $i \in I$ sei $f_i\colon X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für jedes $x \in X$ konvergiere das Netz $(f_i(x))_{i \in I}$ monoton

fallend gegen eine Zahl $f(x) \in \mathbb{R}$, und die dadurch definierte Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ sei stetig. Zeige, dass das Netz (f_i) dann gleichmäßig gegen f konvergiert, also dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $i_0 \in I$ gibt mit $|f_i(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $i \geq i_0$ und alle $x \in X$. Zeige zudem, dass die Aussage im Allgemeinen falsch ist, falls X nicht kompakt oder f nicht stetig ist. (+5)
Hinweis: Wir sagen, dass ein Netz $(y_i)_{i\in I}$ monoton fällt, falls $y_i \leq y_j$ für alle $i \geq j$ gilt.

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$. Zu jedem $x \in X$ gibt es $i_0(x)$ mit $f_i(x) < f(x) + \varepsilon$ für alle $i \geq i_0(x)$, also insbesondere $x \in (f_{i_0(x)} - f)^{-1}((-\infty, \varepsilon))$. Weil $f_{i_0(x)} - f$ stetig ist, gibt es $U_x \in \mathcal{U}(x)$ mit $U_x \subset (f_{i_0(x)} - f)^{-1}((-\infty, \varepsilon))$. Wir erhalten also aufgrund der Monotonie

$$f(x) \leq f_i(x) \leq f_{i_0(x)}(x) < f(x) + \varepsilon$$

für alle $x \in U_x$ und alle $i \geq i_0(x)$.

Wegen $x \in U_x$ für alle $x \in X$ ist $X = \bigcup_{x\in X} U_x$. Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge E von X mit $X = \bigcup_{x\in E} U_x$. Da I gerichtet ist, gibt es $i_0 \in I$ mit $i_0 \geq i_0(x)$ für alle $x \in E$. Ist nun $y \in X$ beliebig, so finden wir ein $x \in E$ mit $y \in U_x$. Dann ist aber nach Konstruktion $f(y) \leq f_i(y) \leq f(y) + \varepsilon$ und somit $|f_i(y) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $i \geq i_0(x)$, insbesondere also für alle $i \geq i_0$. Weil i_0 nicht von y abhängt, zeigt dies die Behauptung.

Gegenbeispiel bei nicht-kompakten Räumen: Betrachte die Folge (f_n) gegeben durch $f_n(x) \coloneqq \arctan(x - n)$. Dann fällt (f_n) punktweise gegen die konstante Funktion $-\frac{\pi}{2}$, aber die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, wie man beispielsweise anhand von $f_n(n) = 0$ sieht.

Gegenbeispiel bei nicht-stetigem Grenzwert: Betrachte die Folge (f_n), die durch $f_n(x) \coloneqq x^n$ auf $[0, 1]$ gegeben ist. Dann fällt (f_n) gegen die Funktion $\mathbb{1}_{\{1\}}$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es aber ein $x_n \in [0, 1)$ mit $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$, woraus folgt, dass die Konvergenz nicht gleichmäßig ist.