UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Dienstag, 21.06.2011

Robin Nittka
Sommersemester 2011
Punktzahl: 20+10

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 8

Wegen Pfingstmontag findet wird die Übung am 14. Juni durch eine Vorlesungsstunde ersetzt. Für die Bearbeitung dieses Blattes stehen somit zwei Wochen zur Verfügung.

25. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum. Zeige:

(a) Ist Y ein Hausdorff-Raum und $f\colon X \to Y$ bijektiv und stetig, so ist f ein Homöomorphismus. (3)

Lösung: Wir müssen zeigen, dass f^{-1} stetig ist. Sei dazu $A \subset X$ abgeschlossen. Weil X kompakt ist, ist A kompakt. Daher ist $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ kompakt und insbesondere abgeschlossen in Y, da Y ein Hausdorff-Raum ist. Wir haben die Stetigkeit von f^{-1} gezeigt.

(b) Es gibt keine Hausdorff-Topologie $\tilde{\mathcal{T}}$ auf X mit $\tilde{\mathcal{T}} \subsetneq \mathcal{T}$. (3)

Lösung: Sei $\tilde{\mathcal{T}}$ eine Hausdorff-Topologie auf X mit $\tilde{\mathcal{T}} \subset \mathcal{T}$. Dann ist die Identität stetig von $(X, \mathcal{T})$ nach $(X, \tilde{\mathcal{T}})$. Nach dem vorigen Aufgabenteil ist diese Abbildung ein Homöomorphismus, was $\mathcal{T} = \tilde{\mathcal{T}}$ zeigt.

26. Seien X und Y kompakte Hausdorff-Räume und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Zeige, dass der Graph $G(f)$ von f genau dann in $X \times Y$ abgeschlossen ist, wenn f stetig ist! (3)

Lösung: Ist f stetig, so ist $G(f)$ nach Aufgabe 21 abgeschlossen. Sei nun also $G(f)$ abgeschlossen. Weil $X \times Y$ nach dem Satz von Tychonoff kompakt ist, ist $G(f)$ kompakt. Da die Abbildung $(x, f(x)) \mapsto x$ nach Aufgabe 21 bijektiv und stetig ist, ist sie nach der vorigen Aufgabe sogar ein Homöomorphismus. Aus Aufgabe 21 folgt nun die Stetigkeit von f.

27. Sei X ein topologischer Raum. Wir vergleichen einige Kompaktheitsbegriffe für X. Zeige:

(a) Ist X folgenkompakt, so ist X *abzählbar kompakt*, d.h. jede abzählbare offene Überdeckung von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung. (3)
Bemerkung: Trivialerweise ist jeder kompakte Raum abzählbar kompakt.

Lösung: Wir nehmen an, X sei folgenkompakt, aber nicht abzählbar kompakt. Sei $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von X ohne endliche Teilüberdeckung. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $x_n \notin \bigcup_{i=1}^n O_i$. Insbesondere enthält jede der Mengen O_i nur endlich viele Folgenglieder. Sei (x_{n_k}) eine konvergente Teilfolge von (x_n) mit Grenzwert $x \in X$. Dann gibt es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \in O_{i_0}$. Wegen Konvergenz gilt $x_{n_k} \in O_{i_0}$ für alle $k \geq k_0$, also $x_n \in O_{i_0}$ für unendlich viele n im Widerspruch zur Wahl von (x_n).

(b) Ist X abzählbar kompakt, so ist X *häufungspunktkompakt*, d.h. jede unendliche Teilmenge von X besitzt einen Häufungspunkt. (3)

Lösung: Es gebe in X eine unendliche Menge M ohne Häufungspunkt. Wir dürfen annehmen, dass M abzählbar ist, denn anderenfalls können wir zu einer abzählbaren Teilmenge von M übergehen, die dann ebenfalls keinen Häufungspunkt besitzt. Insbesondere ist jeder Punkt von M isoliert. Es gibt also zu jedem $x \in M$ eine Umgebung $U_x \in \mathcal{U}(x)$ mit $U_x \cap M = \{x\}$. Da M seine Häufungspunkte enthält, ist

M nach Lemma 3.10 abgeschlossen. Folglich ist auch $U_0 := M^c$ offen. Insgesamt ist also $X = \bigcup_{x \in M} U_x \cup U_0$ eine abzählbare offene Überdeckung von X. Diese besitzt keine endliche Teilüberdeckung, da für jedes $x \in M$ nach Konstruktion $x \notin \bigcup_{y \neq x} U_y \cup U_0$ gilt. Also ist X nicht abzählbar kompakt.

(c) Ist X abzählbar kompakt, so ist X *pseudokompakt*, d.h. jede stetige Funktion von f nach $\mathbb{R}$ ist beschränkt. (3)

Lösung: Sei X abzählbar kompakt und $f\colon X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Menge $O_n := f^{-1}((-n, n))$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ offen und es gilt $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$. Wegen abzählbarer Kompaktheit gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $O_{n_0} = \bigcup_{n=1}^{n_0} O_n = X$, also $|f(x)| \leq n_0$ für alle $x \in X$. Dies zeigt die Beschränktheit von f.

Information: Es gibt noch weitere Kompaktheitsbegriffe, beispielsweise die *Parakompaktheit*, die *Metakompaktheit* und die *Orthokompaktheit*.

28. (a) Sei $X := \{f \in [0,1]^{[0,1]} : f(t) \neq 0$ für höchstens abzählbar viele $t \in [0,1]\}$ mit der Spurtopologie von $[0,1]^{[0,1]}$ versehen. Zeige, dass X folgenkompakt, aber nicht kompakt ist! (3)

Lösung: Betrachten wir X als Teilraum von $[0,1]^{[0,1]}$, so ist X nicht abgeschlossen; wie in der Vorlesung sieht man leicht, dass die konstante Funktion $\mathbb{1}_{[0,1]}$ im Abschluss von X, aber nicht in X liegt. Weil $[0,1]^{[0,1]}$ ein Hausdorff-Raum ist, folgt daraus, dass X keine kompakte Teilmenge von $[0,1]^{[0,1]}$ ist. Somit ist X laut Vorlesung kein kompakter topologischer Raum in der Spurtopologie.

Sei nun (f_n) eine Folge in X. Dann gibt es eine abzählbare Menge $A \subset [0,1]$ mit $f_n(t) = 0$ für alle $t \notin A$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere konvergiert $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $t \in [0,1] \setminus A$ gegen 0. Zudem ist $[0,1]^A$ nach dem Satz von Tychonoff ein kompakter topologischer Raum, der als abzählbare Potenz von $[0,1]$ das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Somit hat die Folge $(f_n|_A)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0,1]^A$ nach dem dritten Aufgabenteil eine konvergente Teilfolge $(f_{n_k}|_A)$ mit Grenzwert $g \in [0,1]^A$. Definiert man nun $f(t) := g(t)$ für $t \in A$ und $f(t) := [0,1] \setminus A$, so ist $f \in X$ und es gilt $f_{n_k}(t) \to f(t)$ für alle $t \in [0,1]$. Das bedeutet gerade $f_{n_k} \to f$ in der Topologie von X, womit die Folgenkompaktheit von X gezeigt ist.

Bemerkung: Die Konvergenz einer Teilfolge auf A könnte man auch direkter mit einem Diagonalfolgenargument schlussfolgern.

(b) Sei $I := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Binärfolgen. Zeige, dass $\{0,1\}^I$ kompakt, aber nicht folgenkompakt ist! Hierbei ist wie üblich $\{0,1\}$ mit der diskreten Topologie und $\{0,1\}^I$ mit der entsprechenden Produkttopologie versehen. (3)
Tipp: Betrachte die Folge $(x_n) \subset \{0,1\}^I$, die durch $x_n((b_i)_{i \in \mathbb{N}}) := b_n$ gegeben ist.

Lösung: Weil $\{0,1\}$ kompakt ist, ist nach dem Satz von Tychonoff der Raum $\{0,1\}^I$ kompakt. Sei nun (x_n) wie im Tipp. Wir nehmen an, (x_n) besitze eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}). Das bedeutet, dass

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k}((b_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \lim_{k \to \infty} b_{n_k}$$

für alle $(b_i)_{i \in \mathbb{N}} \in I$ existiert. Dies ist offenbar falsch, wie man anhand der durch

$$b_i := \begin{cases} 1, & i = n_{2k} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definierten Binärfolge sieht.

(c) Erfüllt ein kompakter topologischer Raum das erste Abzählbarkeitsaxiom, so ist er folgenkompakt. (3)

Lösung: Sei X kompakt und erfülle das erste Abzählbarkeitsaxiom. Sei (x_n) eine Folge in X. Dann besitzt (x_n) laut Vorlesung einen Häufungswert $x \in X$. Sei $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x, wobei wir laut Vorlesung ohne Einschränkung $B_{k+1} \subset B_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ annehmen dürfen. Nach Definition eines Häufungswerts finden wir induktiv Indizes (n_k) mit $n_{k+1} > n_k$ und $x_{n_k} \in B_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also konvergiert die Teilfolge (x_{n_k}) gegen x.

(d) Erfüllt ein folgenkompakter topologischer Raum das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so ist er kompakt. (3)

Lösung: Sei X folgenkompakt und erfülle das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Sei $(O_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Nach Satz 5.7 gibt es eine abzählbare Teilüberdeckung $(O_{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Nach der vorigen Aufgabe ist X abzählbar kompakt. es gibt also eine endliche Teilüberdeckung $(O_{\alpha_n})_{1\leq n\leq N}$ der abzählbaren Überdeckung $(O_{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$, also eine endliche Teilüberdeckung von $(O_\alpha)_{\alpha\in I}$. Dies zeigt die Kompaktheit von X.