Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 28.06.2011

Robin Nittka
Sommersemester 2011
Punktzahl: 20

Elemente der Topologie: Blatt 9

29. Sei $\mathcal{B}_3$ wie in Aufgabe 2. Zeige, dass die Hausdorff-Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{B}_3)$ auf $\mathbb{R}$ nicht regulär ist! (3)

30. Zeige, dass die Sorgenfrey-Topologie auf $\mathbb{R}$ normal ist! (3)

31. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zu $x \in M$ und $\emptyset \neq A \subset M$ definieren wir $d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$. Wir untersuchen in dieser Aufgabe die Funktion $x \mapsto d(x, A)$ und zeigen dabei, dass jeder metrische Raum normal ist. Zeige:

(a) Die Abbildung $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ ist stetig bezüglich der Produkttopologie. (2)

(b) Ist $A \neq \emptyset$, so ist genau dann $d(x, A) = 0$, wenn x in $\overline{A}$ liegt. (2)

(c) Ist $A \neq \emptyset$ kompakt, so gibt es zu jedem $x \in M$ ein *Proximum von x in A*, also einen Punkt $y \in A$ mit $d(x, y) = d(x, A)$. (2)

(d) Für eine abgeschlossene Teilmenge $A \neq \emptyset$ von M und $x \in M$ gibt es im Allgemeinen kein $y \in A$ mit $d(x, y) = d(x, A)$. (2)

(e) Für $\emptyset \neq A \subset M$ ist die Abbildung $M \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, A)$ stetig. (2)

(f) Sind A_1 und A_2 abgeschlossene, nicht-leere, disjunkte Teilmengen von M, so gibt es eine stetige Funktion $f\colon M \to [0, 1]$ mit $f|_{A_1} = 0$ und $f|_{A_2} = 1$. (2)
Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Division $(a, b) \mapsto \frac{a}{b}$ eine stetige Funktion von $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ nach $\mathbb{R}$ ist.

(g) M ist normal. (2)