Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 28.06.2011

Robin Nittka
Sommersemester 2011
Punktzahl: 20

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 9

29. Sei $\mathcal{B}_3$ wie in Aufgabe 2. Zeige, dass die Hausdorff-Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{B}_3)$ auf $\mathbb{R}$ nicht regulär ist! (3)

Lösung: Sei $x := 0$ und $A := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Die Menge A ist abgeschlossen in $\mathcal{T}(\mathcal{B}_3)$. Seien U und O offen in $\mathcal{T}(\mathcal{B}_3)$ mit $x \in U$ und $A \subset O$. Dann gibt es eine Basismenge $B_1 = (a_1, b_1) \setminus N_1$ mit $0 \in B_1 \subset U$, also $a_1 < 0 < b_1$ und N_1 höchstens abzählbar. Sei $n \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, dass $\frac{1}{n} < b_1$ gilt. Wegen $\frac{1}{n} \in O \cap (a_1, b_1)$ gibt es dann eine Basismenge $B_2 = (a_2, b_2) \setminus N_2$ mit $\frac{1}{n} \in B_2 \subset O \cap (a_1, a_2)$, wobei N_2 höchstens abzählbar ist. Damit ist

$$U \cap O \supset B_1 \cap B_2 = (a_2, b_2) \setminus (N_1 \cup N_2) \neq \emptyset,$$

weil $N_1 \cup N_2$ höchstens abzählbar, das Intervall (a_2, b_2) aber überabzählbar ist. Es gibt daher keine offenen Mengen, die x und A trennen, d.h. der Raum ist nicht regulär.

30. Zeige, dass die Sorgenfrey-Topologie auf $\mathbb{R}$ normal ist! (3)

Lösung: Seien A_1 und A_2 abgeschlossen in der Sorgenfrey-Topologie mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Dann gibt es zu jedem $x \in A_1$ ein $r_x > 0$ mit $[x, x + r_x) \subset A_2^c$ und zu jedem $y \in A_2$ ein $q_y > 0$ mit $[y, y + q_y) \subset A_1^c$. Die Mengen $O_1 := \bigcup_{x \in A_1} [x, x + r_x)$ und $O_2 := \bigcup_{y \in A_2} [y, y + q_y)$ sind offen in der Sorgenfreytopologie und es gilt $A_1 \subset O_1$ und $A_2 \subset O_2$. Nehmen wir an, es gäbe $z \in O_1 \cap O_2$, also $z \in [x, x + r_x)$ und $z \in [y, y + r_y)$ für ein $x \in A_1$ und $y \in A_2$. Aus Symmetrieüberlegungen können wir ohne Einschränkung $x \le y$ annehmen. Dann ist aber $y \in [x, z] \subset [x, x + r_x)$ im Widerspruch zu $[x, x + r_x) \subset A_2^c$. Wir haben somit $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ gezeigt, was beweist, dass je zwei abgeschlossene disjunkte Mengen durch offene Mengen getrennt werden können.

31. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zu $x \in M$ und $\emptyset \neq A \subset M$ definieren wir $d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$. Wir untersuchen in dieser Aufgabe die Funktion $x \mapsto d(x, A)$ und zeigen dabei, dass jeder metrische Raum normal ist. Zeige:

(a) Die Abbildung $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ ist stetig bezüglich der Produkttopologie. (2)

Lösung: Seien (x_n) und (y_n) Folgen in M mit $x_n \to x$ und $y_n \to y$. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung

$$d(x_n, y_n) \le d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$$

und analog

$$d(x, y) \le d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y).$$

Insgesamt zeigt dies

$$0 \le |d(x_n, y_n) - d(x, y)| \le d(x_n, x) + d(y_n, y) \to 0,$$

woraus $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ folgt. Weil $M \times M$ als endliches Produkt metrischer Räume das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, folgt hieraus die Stetigkeit von d.

(b) Ist $A \neq \emptyset$, so ist genau dann $d(x, A) = 0$, wenn x in $\overline{A}$ liegt. (2)

Lösung: Ist $x \in \overline{A}$, so gibt es eine Folge (x_n) in A mit $x_n \to x$, also $d(x_n, x) \to 0$. Nach Definition ist $d(x, A) \le \inf_{n \in \mathbb{N}} d(x, x_n) = 0$.

Sei nun $d(x, A) = 0$. Nach den Eigenschaften des Infimums gibt es eine Folge (x_n) in A mit $d(x, x_n) \to d(x, A) = 0$, also $x_n \to x$. Somit ist x im Folgenabschluss von A und daher auch im Abschluss.

(c) Ist $A \neq \emptyset$ kompakt, so gibt es zu jedem $x \in M$ ein *Proximum von x in A*, also einen Punkt $y \in A$ mit $d(x, y) = d(x, A)$. (2)

Lösung: Sei x fest. Die Funktion $y \mapsto d(x, y)$ ist stetig von A nach $\mathbb{R}$, wie man mit der ersten Teilaufgabe und der Charakterisierung der Stetigkeit als Folgenstetigkeit sieht. Wegen Kompaktheit nimmt diese Funktion ein Minimum an. Es gibt also ein $y_{\min} \in A$ mit $d(x, y_{\min}) \leq d(x, y)$ für alle $y \in A$, woraus aber $d(x, y_{\min}) = d(x, A)$ folgt.

(d) Für eine abgeschlossene Teilmenge $A \neq \emptyset$ von M und $x \in M$ gibt es im Allgemeinen kein $y \in A$ mit $d(x, y) = d(x, A)$. (2)

Lösung: Wir betrachten den metrischen Raum $M := \{0\} \cup (1, \infty)$ mit der von $\mathbb{R}$ geerbten Metrik. Dann ist $A := (1, \infty)$ abgeschlossen, denn die Spurtopologie bezüglich $\mathbb{R}$ ist laut Vorlesung die metrische Topologie der geerbten Metrik, und es ist klar, dass $x := 0$ kein Proximum in A hat, denn es ist $d(x, A) = 1$, aber es gibt kein $y \in M$ mit $d(x, y) = 1$.

Bemerkung: Man kann kein Beispiel mit $M = \mathbb{R}^N$ finden: Man macht sich leicht klar, dass $d(x, A) = d(x, A \cap B_r(x))$ für jede abgeschlossene Kugel $B_r(x)$ um x mit Radius $r > d(x, A)$ gilt. Weil aber $A \cap B_r(x)$ kompakt ist, gibt es bezüglich dieser Menge ein Proximum, und dieses ist auch ein Proximum bezüglich A.

(e) Für $\emptyset \neq A \subset M$ ist die Abbildung $M \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, A)$ stetig. (2)

Lösung: Seien x und y in M. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $x_\varepsilon \in A$ mit $d(x, x_\varepsilon) \leq d(x, A) + \varepsilon$. Also ist

$$d(y, A) \leq d(y, x_\varepsilon) \leq d(y, x) + d(x, x_\varepsilon) \leq d(x, y) + d(x, A) + \varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$, was $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$ zeigt. Vertauscht man die Rollen von x und y, so erhält man $|d(y, A) - d(x, A)| \leq d(x, y)$ für alle x und y in M. Insbesondere gilt für eine gegen einen Grenzwert x konvergente Folge (x_n) aufgrund dieser Abschätzung $d(x_n, A) \to d(x, A)$, was die Behauptung zeigt.

(f) Sind A_1 und A_2 abgeschlossene, nicht-leere, disjunkte Teilmengen von M, so gibt es eine stetige Funktion $f \colon M \to [0, 1]$ mit $f|_{A_1} = 0$ und $f|_{A_2} = 1$. (2)
Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Division $(a, b) \mapsto \frac{a}{b}$ eine stetige Funktion von $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ nach $\mathbb{R}$ ist.

Lösung: Wir definieren $f(x) := \frac{d(x, A_1)}{d(x, A_1) + d(x, A_2)}$. Diese Funktion ist wohldefiniert, weil der Nenner nur für $x \in \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \emptyset$ verschwindet. Zudem ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig, und wegen $d(x, A_1) = 0$ für $x \in A_1$ und $d(x, A_2) = 0$ für $x \in A_2$ hat die Funktion die gewünschten Eigenschaften.

(g) M ist normal. (2)

Lösung: Seien A_1 und A_2 abgeschlossen und disjunkt und wähle f wie im vorigen Aufgabenteil. Dann sind $O_1 := f^{-1}((-\infty, \frac{1}{2}))$ und $O_2 := f^{-1}((\frac{1}{2}, \infty))$ offene Mengen in M mit $A_1 \subset O_1$, $A_2 \subset O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.