Robin Nittka
Sommersemester 2011
Punktzahl: 20+3

Elemente der Topologie: Blatt 10

32. Sei X ein normaler Hausdorff-Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Zeige:

(a) Es gibt eine abzählbare Familie $\mathcal{F}$ bestehend aus stetigen Funktionen von X nach $[0,1]$ mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung U von x eine Funktion $f \in \mathcal{F}$ gibt mit $f(x) = 1$ und $f(y) = 0$ für alle $y \notin U$. (3)
Tipp: Gegeben Basismengen B_1 und B_2 mit $\overline{B}_1 \subset B_2$, wähle eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $f(x) = 1$ für $x \in \overline{B}_1$ und $f(y) = 0$ für $y \notin B_2$.

(b) Die Abbildung $F\colon X \to [0,1]^{\mathcal{F}}$, $x \mapsto (f(x))_{f\in\mathcal{F}}$ ist injektiv und stetig. Wir versehen $Y := F(X)$ mit der Spurtopologie von $[0,1]^{\mathcal{F}}$. (2)

(c) Die Abbildung $F\colon X \to Y$ ist ein Homöomorphismus. (3)
Tipp: Um zu zeigen, dass $F(U)$, $U \subset X$ offen, in Y offen ist, betrachte Mengen der Form $Y \cap \pi_f^{-1}((0,\infty))$ für ein passendes $f \in \mathcal{F}$.

(d) X ist metrisierbar. (3)

33. Ein topologischer Raum X heißt *total unzusammenhängend*, falls die einzigen zusammenhängenden Mengen in X die leere Menge und die einelementigen Mengen sind. Zeige:

(a) In der diskreten Topologie ist jeder Raum total unzusammenhängend. (3)

(b) $\mathbb{Q}$ ist total unzusammenhängend in der euklidischen Topologie. (3)

(c) $\mathbb{R}$ ist bezüglich der Sorgenfrey-Topologie total unzusammenhängend. (3)

34. Die Räume $(0,1)$ und $[0,1)$ sind nicht homöomorph. (+3)