Existenz des Abbildungsgrads in $\mathbb{R}^d$

Robin Nittka

19. November

Es soll gezeigt werden, dass es eine Funktion d von der Menge

$$\big\{(f,\Omega,y) : \Omega \subset \mathbb{R}^d \text{ offen und beschränkt}, f \in \mathrm{C}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^d), y \notin f(\partial\Omega)\big\}$$

der zulässigen Tripel in die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ gibt, die folgende Eigenschaften hat:

(D1) $d(\mathrm{id},\Omega,y) = 1$, falls $y \in \Omega$.

(D2) $d(f,\Omega,y) = d(f,\Omega_1,y) + d(\mathrm{id},\Omega_2,y)$, falls $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$.

(D3) $d(h(t,\cdot),\Omega,y(t))$ ist konstant bezüglich $t \in [0,1]$, wenn $h\colon [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ und $y\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$ stetig sind und $y(t) \notin h(t,\partial\Omega)$ für alle $t \in [0,1]$ gilt.

Folgendes Lemma wurde schon im Einführungsvortrag bewiesen.

Lemma 1. *Eigenschaft (D3) ist äquivalent zu folgender Eigenschaft:*

(D5) Sei (f,Ω,y) zulässig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass für alle $g \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ und alle $y \in \mathbb{R}^d$ mit $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$ und $|z-y| < \varepsilon$ auch das Tripel (g,Ω,z) zulässig ist und $d(f,\Omega,y) = d(g,\Omega,z)$ gilt.

Es genügt also, die Eigenschaften (D1), (D2) und (D5) nachzuweisen.
Zuerst betrachten wir den Fall stetig differenzierbarer Funktionen und regulärer Werte. Die Matrix $f'(x)$ soll also für alle $x \in \Omega$ mit $f(x) = y$ invertierbar sein. In diesem Fall ist die Menge $f^{-1}(y) := \{x \in \Omega : f(x) = y\}$ endlich, wie bereits im Vortrag über die Eindeutigkeit gezeigt wurde. Man kann also sinnvoll

$$d(f,\Omega,y) := \sum_{f(x)=y} \operatorname{sgn}\det f'(x) \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

definieren. Die Funktion aus (1) erfüllt offenbar (D1). Ist f stetig differenzierbar und y für f regulär, so gilt auch die Aussage von (D2). Wir weisen nun zuerst eine schwächere Variante von (D5) nach.
Dazu benötigen wir folgende Version des Satzes über die lokale Inverse. Einen Beweis des Zusatzes kann man in [2, Lemma 5.4] finden.

Satz 2 (Lokale Umkehrfunktion). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar. Sei $x_0 \in \Omega$ ein Wert, für den $f'(x_0)$ invertierbar ist, und sei $y_0 := f(x_0)$. Dann gibt es $r_0 > 0$ mit der Eigenschaft, dass für jede offene Menge $U \subset B(x_0, r_0) \subset \Omega$ die Menge $V := f(U)$ offen ist, die Abbildung $f|_U\colon U \to V$ bijektiv ist, und $f|_U^{-1}$ stetig differenzierbar ist.*
Genauer gilt sogar Folgendes: Sei $M := |f'(x_0)^{-1}|$. Ist $r < r_0$ so klein, dass für alle $x_1, x_2 \in B(x_0, r)$ die Abschätzung $|f'(x_1) - f'(x_2)| < \frac{1}{2M}$ gilt, so gibt es zu jedem $y \in B(y_0, \frac{r}{2M})$ genau ein $x \in B(x_0, r)$ mit $f(x) = y$.

Lemma 3. *Sei (f, Ω, y) zulässig, f stetig differenzierbar und y regulär. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft: Ist g eine stetig differenzierbare Funktion auf Ω mit $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$ und $\|f' - g'\|_\infty < \varepsilon$ und ist $z \in \mathbb{R}^d$ mit $|y - z| < \varepsilon$, so ist (g, Ω, z) zulässig, z ein regulärer Wert für g, und es gilt $d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, z)$, wobei d wie in (1) definiert ist.*

Beweis. Es wurde bereits gesagt, dass $f^{-1}(y)$ eine endliche Teilmenge von Ω ist. Es gibt also endlich viele disjunkte, offene Mengen $U_i \subset \Omega$ mit der Eigenschaft dass U_i genau eine y-Stelle x_i von f enthält, also $U_i \cap f^{-1}(y) = \{x_i\}$.
Sei nun $r_i > 0$ wie in Satz 2 für f zu x_i gewählt. Wir können r_i so klein wählen, dass $\overline{B(x_i, r_i)} \subset U_i$ gilt. Setze $M_i := |f'(x_i)^{-1}|$. Weil f' stetig ist, gibt es $\tilde r_i < r_i$ mit der Eigenschaft, dass $|f'(\tilde x_1) - f'(\tilde x_2)| < \frac{1}{8M_i}$ für alle $\tilde x_1, \tilde x_2 \in B(x_i, \tilde r_i)$ gilt. Weiterhin kann man wegen Stetigkeit $|\det f'(x)| \geq \alpha$ für $x \in B(x_i, \tilde r_i)$ für ein $\alpha > 0$ erreichen, indem man $\tilde r_i$ weiter verkleinert.
Die Menge $K := \overline{\Omega} \setminus B(x_i, \tilde r_i)$ ist dann kompakt mit $y \notin f(K)$, also $\operatorname{dist}(y, f(K)) > 0$. Ist nun ε klein genug, genauer $2\varepsilon < \operatorname{dist}(y, f(K))$, und $\|g - f\|_\infty < \varepsilon$, $|z - y| < \varepsilon$, so gilt

$$|g(x) - z| \geq |f(x) - y| - |f(x) - g(x)| - |y - z| \geq \operatorname{dist}(y, f(K)) - 2\varepsilon > 0,$$

für alle $x \in K$, also $z \notin g(K)$. Da d die Eigenschaft (D2) hat, ist also für kleine ε stets

$$d(g, \Omega, z) = \sum_i d(g, B(x_i, \tilde r_i), z) \quad \text{und} \quad d(f, \Omega, y) = \sum_i d(f, B(x_i, \tilde r_i), y).$$

Folglich genügt es, $d(f, U_i, y) = d(g, U_i, z)$ für jedes i zu zeigen.
Sei nun ε so klein, dass wie oben $2\varepsilon < \operatorname{dist}(y, f(K))$ gilt, aber zudem noch $\varepsilon < \frac{1}{16M_i}$ und $\varepsilon < \frac{\tilde r_i}{4M_i}$ für alle i. Weil die Zuordnung $A \mapsto A^{-1}$ stetig ist wie man aus der Cramer'schen Formel sieht, kann man ε zudem so klein wählen, dass aus $|A - f'(x_i)| < \varepsilon$ auch $|A^{-1} - f'(x_i)^{-1}| \leq M_i$ folgt. Wegen gleichmäßiger Stetigkeit der Determinanten kann man ε weiterhin so klein wählen, dass $|\det A - \det f'(x)| < \frac{\alpha}{2}$ ist, sofern die Abschätzung $|A - f'(x)| < \varepsilon$ für ein $x \in B(x_i, \tilde r_i)$ gilt. Sei nun g so gewählt, dass $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$, $\|f' - g'\|_\infty < \varepsilon$ und $|y - z| < \varepsilon$. Dann folgt $|g'(x_i)^{-1} - f'(x_i)^{-1}| < M_i$ und daher

$$\begin{aligned}|g'(\tilde x_1) - g'(\tilde x_2)| &\leq |f'(\tilde x_1) - f'(\tilde x_2)| + 2\varepsilon < \frac{1}{8M_i} + \frac{2}{16M_i} = \frac{1}{4M_i} \\ &\leq \frac{1}{2\,|f'(x_i)^{-1}| + 2\,|g'(x_i)^{-1} - f'(x_i)^{-1}|} \leq \frac{1}{2\,|g'(x_i)^{-1}|}.\end{aligned}$$

Also erfüllen g und z wegen

$$|z - y_0| < \varepsilon < \frac{\tilde{r}_i}{4M_i} \leq \frac{\tilde{r}_i}{2\,|g'(x_i)^{-1}|}$$

auf $B(x_0, \tilde{r}_i)$ die Voraussetzungen des Zusatzes von Satz 2. Es gibt also genau einen Punkt $x_i^g \in B(x_i, \tilde{r}_i)$ mit $g(x_i^g) = z$. Dann ist aber $|g'(x_i^g) - f'(x_i^g)| < \varepsilon$, also nach Wahl von ε auch $\operatorname{sgn}\det g'(x_i^g) = \operatorname{sgn}\det f'(x_i^g) = \operatorname{sgn}\det f'(x_i)$. Folglich gilt

$$d(g, B(x_i, \tilde{r}_i), z) = \operatorname{sgn}\det g'(x_i^g) = \operatorname{sgn}\det f'(x_i) = d(f, B(x_i, \tilde{r}_i), y).$$

Nach obiger Überlegung folgt daraus die Behauptung. □

Man kann nun den Beweis von (D5) nach (D3) imitieren, um folgende Aussage zu erhalten. Man braucht als Hilfsmittel allerdings, dass $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, z)$ gilt, sofern y und z in derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^d \setminus f(\partial\Omega)$ liegen [1, Proposition 1.8].

Korollar 4. *Sei h eine C^1-Homotopie. Das soll bedeuten, dass $h\colon [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ eine Funktion ist mit der Eigenschaft, dass $x \mapsto h(t,x)$ für jedes t stetig differenzierbar ist und dass $\|h(t,\cdot) - h(s,\cdot)\|_\infty \to 0$ und $\|\frac{\partial}{\partial x}h(t,\cdot) - \frac{\partial}{\partial x}h(s,\cdot)\|_\infty \to 0$ für $t \to s$ gilt. Sei $y\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$ stetig mit $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ für $t \in [0,1]$. Dann ist $d(h(t,\cdot), \Omega, y(t))$ konstant bezüglich $t \in [0,1]$.*

Mit diesem Hilfsmittel lässt sich beweisen, dass auf regulären Werten sogar (D5) für d erfüllt ist.

Lemma 5. *Sei (f, Ω, y) zulässig, f stetig differenzierbar und y für f regulär. Dann ist für stetig differenzierbare Funktionen g und reguläre Werte z mit der Eigenschaft $\|g - f\|_\infty + |z - y| < \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega)$ auch (g, Ω, z) zulässig und $d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, z)$.*

Beweis. Mit der üblichen Rechnung ist $z \notin g(\partial\Omega)$ und daher (g, Ω, z) zulässig. Definiere $h(t,x) := tf(x) + (1-t)g(x)$ und $y(t) := ty + (1-t)z$. Es ist sehr leicht zu sehen, dass h dann eine C^1-Homotopie und $y(\cdot)$ stetig ist. Nach Korollar 4 folgt daraus $d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, z)$. □

Wir haben d bisher nur auf stetig differenzierbaren Funktionen und regulären Werten betrachtet. Sei nun aber f lediglich stetig auf $\overline{\Omega}$ und $y \in \mathbb{R}^d$ ein Vektor mit $y \notin f(\partial\Omega)$. Wähle $\varepsilon < \frac{1}{4}\operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$. Im letzten Vortrag wurde bewiesen, dass es eine stetig differenzierbare Funktion $\tilde{f}$ mit $\|f - \tilde{f}\| < \frac{\varepsilon}{4}$ gibt, und dass es in $B(y, \frac{\varepsilon}{4})$ einen für f regulären Wert $\tilde{y}$ gibt. Wir definieren nun

$$d(f, \Omega, y) := d(\tilde{f}, \Omega, \tilde{y}) = \sum_{\tilde{f}(x) = \tilde{y}} \operatorname{sgn}\det \tilde{f}'(x).$$

Diese Definition hängt nicht von der Wahl von $\tilde{f}$ und $\tilde{y}$ ab. Seien nämlich $\tilde{f}_1$ und $\tilde{f}_2$ stetig differenzierbare Funktionen und $\tilde{y}_1$ und $\tilde{y}_2$ zugehörige reguläre Werte. Dann ist

$$\|\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2\|_\infty + |\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{4}\operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega)) \leq \operatorname{dist}(\tilde{y}_1, \tilde{f}_1(\partial\Omega))$$

und daher $d(\tilde{f}_1, \Omega, \tilde{y}_1) = d(\tilde{f}_2, \Omega, \tilde{y}_2)$ nach Lemma 5.
Es ist nur noch zu prüfen, dass diese erweiterte Definition die gewünschten Eigenschaften hat. Eigenschaft (D1) ist offenbar immer noch erfüllt. Seien Ω_1 und Ω_2 wie in (D2) und wähle $\tilde{f}$ und $\tilde{y}$ als reguläre Approximation von f und y auf Ω, die sogar

$$\|f - \tilde{f}\|_\infty + |y - \tilde{y}| < \frac{1}{4} \min\Big\{\mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega)), \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega_1)), \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega_2))\Big\}$$

erfüllt. Dann ist $\tilde{f}$ mit $\tilde{y}$ eine gute Approximation von f mit y auf jeder der Mengen Ω, Ω_1 und Ω_2, und daher gilt nach Definition

$$d(f, \Omega, y) = d(\tilde{f}, \Omega, \tilde{y}) = d(\tilde{f}, \Omega_1, \tilde{y}) + d(\tilde{f}, \Omega_2, \tilde{y}) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y).$$

Bei (D5) kann man $\varepsilon := \frac{1}{34}\,\mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega))$ wählen. Sei nämlich $\|g - f\|_\infty + |z - y| < \varepsilon$ und $\tilde{f}$ mit $\tilde{y}$ eine reguläre Approximation von f mit y, die $\|f - \tilde{f}\| + |y - \tilde{y}| < \varepsilon$ erfüllt. Wegen

$$\mathrm{dist}(z, g(\partial\Omega)) \geq \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega)) - 2\varepsilon \geq 32\varepsilon$$

folgt

$$\|g - \tilde{f}\|_\infty < 2\varepsilon \leq \frac{1}{16}\,\mathrm{dist}(z, g(\partial\Omega))$$

und

$$|z - \tilde{y}| < 2\varepsilon \leq \frac{1}{16}\,\mathrm{dist}(z, g(\partial\Omega)).$$

Man kann in der Definition von $d(g, \Omega, z)$ also $\tilde{g} := \tilde{f}$ und $\tilde{z} := \tilde{y}$ wählen und hat nach Definition $d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, z)$. Da aber (D5) wie bereits gesagt (D3) impliziert, haben wir hiermit nachgerechnet, dass d auf allen zulässigen Tripeln alle gewünschten Eigenschaften besitzt.

Literatur

[1] I. Fonseca and W. Gangbo, *Degree Theory in Analysis and Applications*, Clarendon Press, 1995.

[2] S. Lang, *Differential and Riemannian Manifolds*, Springer, 1995.