Universität Ulm
Mittwoch / Donnerstag

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2008/09

Gesamt: 21 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 1

1. Entscheide, ob (X,d) ein metrischer Raum ist! Hierbei sei stets $N \in \mathbb{N}$. Mit $\#M \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ist die Anzahl der Elemente einer Menge M gemeint, und $|x| := \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^2\right)^{1/2}$ bezeichnet die übliche (euklidische) Norm eines Vektors $x \in \mathbb{R}^N$.

(a) $X = A^N := \{x = (x_1, \ldots, x_N) | x_i \in A\}$ (A eine nicht-leere Menge);
$d(x,y) := \#\{i \in \{1,\ldots,N\} | x_i \neq y_i\}$. (2)

(b) $X = \mathscr{P}(\mathbb{N})$; $d(A,B) := \#\Big(\big(A \cap B^C\big) \cup \big(A^C \cap B\big)\Big)$. Hier bezeichnet $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ Potenzmenge (Menge aller Teilmengen) von $\mathbb{N}$ und $M^C := \mathbb{N} \setminus M$ das Komplement von M in $\mathbb{N}$. (2)

(c) $X = \mathbb{R}^N$; $d(x,y) := \begin{cases} |x-y|, & \text{falls } x,\, y \text{ linear abhängig sind,} \\ |x| + |y|, & \text{sonst.} \end{cases}$ (3)

2. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeige, dass folgende Aussagen für eine Teilmenge $M \neq \emptyset$ von X äquivalent sind:

(i) Es gibt $x_0 \in X$ und $R > 0$ mit $d(x_0, y) \leq R$ für alle $y \in M$.

(ii) Zu jedem $x \in X$ gibt es ein $R(x) > 0$ mit $d(x,y) \leq R(x)$ für alle $y \in M$.

(iii) Es gibt $R' > 0$ mit der Eigenschaft, dass für alle $x, y \in M$ die Abschätzung $d(x,y) \leq R'$ erfüllt ist.

Hat $M \subset X$ obige Eigenschaften, so heißt M *beschränkt*. Der Raum X heißt beschränkt, falls $M := X \subset X$ beschränkt ist. (3)

3. Sei (K,d) ein kompakter metrischer Raum. Zeige:

(a) K ist beschränkt (vgl. Aufgabe 2). (2)

(b) Eine Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn sie gleichmäßig stetig ist. (2)

4. Sei (X,d) ein metrischer Raum.

(a) Zeige, dass folgende Aussagen für eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ äquivalent sind:

(i) Für jedes $x \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit $f(y) > f(x) - \varepsilon$ für alle $y \in B(x,\delta)$.

(ii) $\liminf_{y \to x} f(y) \geq f(x)$ für jedes $x \in X$.

(iii) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist die Menge $M_c := \{x \in X : f(x) > c\} \subset X$ offen.

(4)

Erfüllt eine Funktion obige Bedingungen, so heißt sie *von unten halbstetig*. Eine Funktion g heißt *von oben halbstetig*, falls $-g$ von unten halbstetig ist.

(b) Zeige, dass $f\colon X \to \mathbb{R}$ genau dann stetig ist, wenn f von oben und von unten halbstetig ist! (1)

(c) Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ von unten halbstetig und sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum. Zeige, dass f auf X ein Minimum annimmt! (2)

Die Übungsblätter sowie aktuelle Informationen sind unter folgender Adresse verfügbar:
http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ws0809/fa.html