Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 1

1. Entscheide, ob (X, d) ein metrischer Raum ist! Hierbei sei stets $N \in \mathbb{N}$. Mit $\#M \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ist die Anzahl der Elemente einer Menge M gemeint, und $|x| := \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^2\right)^{1/2}$ bezeichnet die übliche (euklidische) Norm eines Vektors $x \in \mathbb{R}^N$.

(a) $X = A^N := \big\{x = (x_1, \ldots, x_N) | x_i \in A\big\}$ (A eine nicht-leere Menge);
$d(x, y) := \#\big\{i \in \{1, \ldots, N\} | x_i \neq y_i\big\}$. (2)

Lösung: Offenbar ist $d(x, y) \in \mathbb{N}_0 \subset [0, \infty)$ und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$. Die Symmetrie ist klar nach Definition. Seien nun $x, y, z \in A^N$. Definiere $D(a, b) := \big\{i | a_i \neq b_i\big\}$. Dann ist $d(a, b) = \#D(a, b)$. Offenbar ist $D(x, z) \subset D(x, y) \cup D(y, z)$, also

$$d(x, z) = \#D(x, z) \leq \#\big(D(x, y) \cup D(y, z)\big) \leq \#D(x, y) + \#D(y, z) = d(x, y) + d(y, z).$$

Damit sind alle Eigenschaften einer Metrik geprüft.

Weitere Bemerkungen:
Vor allem im Fall $A = \{0, 1\}$ bezeichnet man d als *Hamming distance* auf X. Kennt man ein wenig mehr Theorie von metrischen Räumen, kann man auch schneller sehen, dass (X, d) ein metrischer Raum ist, indem man ihn als endliches Produkt von N Kopien des metrischen Raums A mit der diskreten Metrik identifiziert.

(b) $X = \mathscr{P}(\mathbb{N})$; $d(A, B) := \#\Big(\big(A \cap B^C\big) \cup \big(A^C \cap B\big)\Big)$. Hier bezeichnet $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ Potenzmenge (Menge aller Teilmengen) von $\mathbb{N}$ und $M^C := \mathbb{N} \setminus M$ das Komplement von M in $\mathbb{N}$. (2)

Lösung: Die Abbildung d geht nicht nach $\mathbb{R}$; es ist beispielsweise $d(\mathbb{N}, \emptyset) = \infty$. Daher ist (X, d) kein metrischer Raum.

Weitere Bemerkungen:
Definiert man aber beispielsweise $\tilde{d}(A, B) := \min\{d(A, B), c\}$ für ein $c > 0$, so ist $(X, \tilde{d})$ ein metrischer Raum, selbst wenn $\mathbb{N}$ durch eine beliebige andere Menge ersetzt wird.

(c) $X = \mathbb{R}^N$; $d(x, y) := \begin{cases} |x - y|, & \text{falls } x, y \text{ linear abhängig sind,} \\ |x| + |y|, & \text{sonst.} \end{cases}$ (3)

Lösung: Von der Dreiecksungleichung abgesehen sind alle Eigenschaften einer Metrik offensichtlich erfüllt. Seien nun also $x, y, z \in \mathbb{R}^N$. Wir müssen $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ zeigen. Dies ist durch Fallunterscheidung möglich. Hierbei ist die Beobachtung hilfreich, dass stets $|a - b| \leq d(a, b)$ gilt.

1.) Sei x, z linear abhängig.

$$d(x, z) = |x - z| \leq |x - y| + |y - z| \leq d(x, y) + d(y, z).$$

2.) Sei x, z linear unabhängig. Dann ist entweder $y = 0$ oder mindestens eines der beiden Paare x, y und y, z linear unabhängig.

i) Sei $y = 0$.

$$d(x, z) = |x| + |z| = |x - 0| + |0 - z| = d(x, y) + d(y, z).$$

ii) Sei x, y linear unabhängig.

$$d(x,z) = |x| + |z| \leq |x| + (|z-y| + |y|) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

iii) Sei y, z linear unabhängig.

$$d(x,z) = |x| + |z| \leq (|x-y| + |y|) + |z| \leq d(x,y) + d(y,z).$$

In allen diesen Fällen gilt also die Behauptung.

Weitere Bemerkungen:
Man bezeichnet d oft als *French railroad distance*. Die Interpretation dabei ist, dass in Frankreich auch das Schienennetz so zentralisiert ist, dass alle Bahnlinien radial von Paris ausgehen. Will man also an einen Ort fahren, der nicht in gemeinsamer Linie mit Paris (hier in den Ursprung) gelegt, muss man immer zuerst nach Paris und von dort aus weiterfahren.

2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass folgende Aussagen für eine Teilmenge $M \neq \emptyset$ von X äquivalent sind:

(i) Es gibt $x_0 \in X$ und $R > 0$ mit $d(x_0, y) \leq R$ für alle $y \in M$.

(ii) Zu jedem $x \in X$ gibt es ein $R(x) > 0$ mit $d(x, y) \leq R(x)$ für alle $y \in M$.

(iii) Es gibt $R' > 0$ mit der Eigenschaft, dass für alle $x, y \in M$ die Abschätzung $d(x, y) \leq R'$ erfüllt ist.

Hat $M \subset X$ obige Eigenschaften, so heißt M *beschränkt*. Der Raum X heißt beschränkt, falls $M := X \subset X$ beschränkt ist. (3)

Lösung:

„(iii) $\Rightarrow$ (ii)“ Sei $y_0 \in M$ beliebig gewählt. Dann erfüllt $R(x) := R' + d(x, y_0)$ die Bedingung.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)“ Wähle $x_0 \in X$ beliebig und $R := R(x_0)$.

„(i) $\Rightarrow$ (iii)“ Seien x_0 und R wie in der Voraussetzung. Dann kann man $R' := 2R$ wählen, denn nach Voraussetzung gilt für alle $x, y \in M$

$$d(x,y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \leq R + R = R'.$$

3. Sei (K, d) ein kompakter metrischer Raum. Zeige:

(a) K ist beschränkt (vgl. Aufgabe 2). (2)

Lösung: Wir nehmen an, K wäre nicht beschränkt, also dass es ein $x_0 \in K$ gibt mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in K$ mit $d(x_0, y_n) > n$ gibt (Negation der Aussage Aufgabe 2(ii)). Weil K kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(z_k) = (y_{n_k})$ von (y_n) mit Grenzwert $z \in K$. Nach Definition gilt also $d(z_k, z) \to 0$ mit $k \to \infty$ und daher

$$d(x_0, z_k) \leq d(x_0, z) + d(z, z_k) \leq d(x_0, z) + 1$$

für hinreichend große k. Dies ist ein Widerspruch zu $d(x_0, z_k) \geq n_k \to \infty$.

(b) Eine Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn sie gleichmäßig stetig ist. (2)

Lösung: Man sieht direkt aus der Definition, dass gleichmäßig stetige Funktionen stetig sind. Sei nun $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig. Angenommen, f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es $\varepsilon_0 > 0$ mit der Eigenschaft, dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, y_n \in K$ existieren, die $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$ erfüllen. Wegen Kompaktheit gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n), die gegen ein $z \in K$ konvergiert. Wegen

$$d(y_n, z) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, z) \leq \frac{1}{n} + d(x_n, z) \to 0$$

konvergiert dann auch (y_n) gegen z. Da f stetig ist, folgt daraus $f(x_n) \to f(z) \leftarrow f(y_n)$, was wiederum $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$ zeigt im Widerspruch zu $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 > 0$.

4. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Zeige, dass folgende Aussagen für eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ äquivalent sind:

(i) Für jedes $x \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit $f(y) > f(x) - \varepsilon$ für alle $y \in B(x, \delta)$.

(ii) $\liminf_{y \to x} f(y) \geq f(x)$ für jedes $x \in X$.

(iii) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist die Menge $M_c := \{x \in X : f(x) > c\} \subset X$ offen.

(4)

Lösung: Zur Erinnerung: Die Definition des *Limes inferior* für Funktionen ist

$$\liminf_{y \to x} f(y) := \lim_{\delta \to 0} \inf_{y \in B(x,\delta)} f(y) = \sup_{\delta > 0} \inf_{y \in B(x,\delta)} f(y).$$

„(i) $\Rightarrow$ (ii)“ Aus der Definition und Monotonie in δ folgt unmittelbar, dass

$$\liminf_{y \to x} f(y) \geq f(x) - \varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt, also $\liminf_{y \to x} f(y) \geq f(x)$.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)“ Nach Definition gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\inf_{y \in B(x,\delta)} f(y) \geq \liminf_{y \to x} f(y) - \varepsilon \geq f(x) - \varepsilon.$$

Dies zeigt die Behauptung.

„(i) $\Rightarrow$ (iii)“ Sei $c \in \mathbb{R}$ und $x \in M_c$, also $f(x) > c$. Es ist zu zeigen, dass es $\delta > 0$ mit $B(x, \delta) \subset M_c$ gibt. Wähle dazu $\varepsilon := f(x) - c > 0$ und δ wie in (i). Für jedes $y \in B(x, \delta)$ gilt dann also $f(y) > f(x) - \varepsilon = c$, also $y \in M_c$, was $B(x, \delta) \subset M_c$ zeigt.

„(iii) $\Rightarrow$ (i)“ Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $c := f(x) - \varepsilon$. Weil x in M_c liegt und M_c offen ist, gibt es $\delta > 0$ mit $B(x, \delta) \subset M_c$, was gerade $f(y) > f(x) - \varepsilon$ für alle $y \in B(x, \delta)$ bedeutet.

Erfüllt eine Funktion obige Bedingungen, so heißt sie *von unten halbstetig*. Eine Funktion g heißt *von oben halbstetig*, falls $-g$ von unten halbstetig ist.

(b) Zeige, dass $f\colon X \to \mathbb{R}$ genau dann stetig ist, wenn f von oben und von unten halbstetig ist! (1)

Lösung: Mit Charakterisierung (i) des letzten Aufgabenteils folgt, dass eine Funktion f genau dann von oben und von unten halbstetig ist, wenn es für jedes $x \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon$$

für alle $y \in B(x, \delta)$ gibt. Dies ist wiederum äquivalent zur ε-δ-Formulierung von Stetigkeit in $x \in X$.

(c) Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ von unten halbstetig und sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Zeige, dass f auf X ein Minimum annimmt! (2)

Lösung: Sei $m := \inf_{x \in X} f(x) \in [-\infty, \infty)$ und (x_n) eine Folge in X mit $f(x_n) \to m$. Weil X hier kompakt vorausgesetzt wird, kann man nach Übergang zu einer Teilfolge annehmen, dass $x_n \to x \in X$ gilt. Wegen Halbstetigkeit ist nun

$$f(x) \leq \liminf_{n \to \infty} f(x_n) \leq \lim_{n \to \infty} f(x_n) = m,$$

nach Definition des Infimums aber auch $f(x) \geq m$. Also ist $f(x) = m$. Nach Definition von m ist $f(x) = m \leq f(y)$ für alle $y \in X$, was gerade bedeutet, dass x eine globale Minimalstelle von f ist.