Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 2

5. Skizziere die Mengen $B_{n,p} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \le 1\}$ für $(n, p) \in \{2, 3\} \times \{1, 2, \infty\}$. (6)
Erinnerung: $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|$, $\|x\|_2^2 := \sum_{k=1}^n |x_k|^2$, $\|x\|_\infty := \max |x_k|$.

Lösung: Für $n = 2$ ergibt sich bei $p = 2$ ein Kreis, bei $p = \infty$ das Quadrat $[-1, 1]^2$ und bei $p = 1$ ein gedrehter Würfel mit Kantenlänge $\sqrt{2}$. Für $n = 3$ ergibt sich bei $p = 2$ eine Kugel, bei $p = \infty$ das Quadrat $[-1, 1]^3$ und bei $p = 1$ ein Oktaeder mit Kantenlänge $\sqrt{2}$.

6. Zeige: Der Raum c_0 der Nullfolgen mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ ist ein separabler Banachraum. (4)
Tipp: Man kann zuerst nachweisen, dass c_0 ein abgeschlossener Unterraum von ℓ^∞ ist.

Lösung: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass ℓ^∞ mit der $\|\cdot\|_\infty$-Norm vollständig ist. Es ist klar, dass c_0 ein Vektorraum ist, der in ℓ^∞ enthalten ist. Wir weisen nach, dass c_0 in ℓ^∞ abgeschlossen ist; nach einem Kriterium aus der Vorlesung folgt daraus die Vollständigkeit.

Sei also $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in c_0, $x^n = (x_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$, die in ℓ^∞ gegen ein $x \in \ell^\infty$ konvergiert. Es ist zu zeigen, dass dann $x \in c_0$ ist. Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|x^n - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \ge n_0$. Wegen $x^{n_0} \in c_0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_k^{n_0}| \le \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \ge k_0$. Für $k \ge k_0$ gilt also

$$|x_k| \le |x_k - x_k^{n_0}| + |x_k^{n_0}| \le \|x - x^{n_0}\|_\infty + |x_k^{n_0}| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, zeigt dies, dass x eine Nullfolge ist, also $x \in c_0$.

Um die Separabilität von c_0 zu zeigen, genügt es laut Vorlesung, eine totale Folge in c_0 zu finden. Es soll gezeigt werden, dass die kanonischen Einheitsvektoren e^n, $e_k^n := \delta_{nk}$, in c_0 total sind. Sei $x \in c_0$ beliebig und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es k_0 mit $|x_k| \le \varepsilon$ für alle $k \ge k_0$. Definiere $y := \sum_{k=1}^{k_0} x_k e^k$. Dann ist $y \in \operatorname{span}\{e^n\}$ und

$$\|x - y\|_\infty = \|(0, 0, \dots, 0, x_{k_0+1}, x_{k_0+2}, \dots)\|_\infty = \sup_{k>k_0} |x_k| \le \varepsilon.$$

Dies zeigt, dass der Raum $c_{00} := \operatorname{span}\{e^n\}$ der *abbrechenden Folgen* in c_0 dicht ist, was gerade bedeutet, dass die e^n in c_0 total sind.

7. Zeige:

(a) Die Menge $\ell^1 := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty\}$ ist ein Vektorraum. (1)

Lösung: Es ist offensichtlich, dass $0 \in \ell^1$ gilt und mit $x \in \ell^1$ auch $\alpha x \in \ell^1$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Sind x und y in ℓ^1, so konvergiert auch die Reihe $\sum_n \big(|x_n| + |y_n|\big)$ und daher nach dem Majorantenkriterium auch $\sum_n |x_n + y_n|$. Also ist $x + y \in \ell^1$. Diese beiden Beobachtungen zeigen, dass ℓ^1 ein Unterraum des Vektorraums aller reellen Folgen und daher selbst ein Vektorraum ist.

(b) Der Ausdruck $\|x\|_1 := \sum_{n=1}^\infty |x_n|$ definiert eine Norm auf ℓ^1. (1)

Lösung: Nach Definition ist $\|x\|_1 \in [0, \infty)$ für alle $x \in \ell^1$. Offenbar ist $\|x\|_1 = 0$ genau dann erfüllt, wenn $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, also genau für $x = 0$. Nach den Rechenregeln für unendliche Reihen ist $\|\alpha x\|_1 = |\alpha|\, \|x\|_1$. Die Dreiecksungleichung folgt mit der gleichen Abschätzung wie in Teil (a).

(c) Der Raum $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ ist vollständig. (4)

Lösung: Sei $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x^n = (x_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in ℓ^1. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt die Abschätzung $|x_k^n - x_k^m| \le \|x^n - x^m\|_1$. Folglich ist für jedes k die Folge $(x_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und daher konvergent gegen einen Wert $x_k \in \mathbb{R}$. Es muss nun noch gezeigt werden, dass die Folge $x := (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in ℓ^1 liegt und (x^n) in der Norm von ℓ^1 gegen x konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Voraussetzung gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $n, m \ge n_0$

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k^n - x_k^m| \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^n - x_k^m| = \|x^n - x^m\|_1 \le \varepsilon$$

gilt. Bildet man in dieser Ungleichung den Grenzwert $m \to \infty$, so kann man wegen Stetigkeit der Summation endlich vieler Glieder und der Stetigkeit des Betrags folgern, dass

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k^n - x_k| \le \varepsilon$$

für alle $n \ge n_0$ und alle $N \in \mathbb{N}$ gilt. Als Folge in N ist die linke Seite monoton wachsend und beschränkt, also konvergent, und damit ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^n - x_k| \le \varepsilon.$$

Dies zeigt nach Definition $x^n - x \in \ell^1$, aufgrund der Vektorraumstruktur von ℓ^1 also $x \in \ell^1$, und es gilt $\|x^n - x\|_1 \le \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$. Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, zeigt dies gerade, dass x^n in ℓ^1 gegen x konvergiert.

(d) Der *positive Kegel* $\ell^1_+ := \{x \in \ell^1 : x_n \ge 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$ ist abgeschlossen. (2)

Lösung: Im Beweis von Teil (c) ergab sich als Teilresultat, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Projektion $\pi_k \colon \ell^1 \to \mathbb{R}, x \mapsto x_k$ stetig ist. Weil die Urbilder abgeschlossener Mengen unter stetigen Funktionen abgeschlossen sind, sind also die Mengen $A_k := \{x \in \ell^1 : x_k \ge 0\}$ abgeschlossen in ℓ^1. Daher ist auch ihr Durchschnitt $\ell^1_+ = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ abgeschlossen.

8. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subset M$. Zeige, dass folgende Eigenschaften für eine Menge $B \subset M$ äquivalent sind: (2)

1.) $A \subset B$, B ist abgeschlossen und für jede abgeschlossene Menge $C \subset M$ mit $A \subset C$ ist $B \subset C$.
Hinweis: Dies bedeutet, dass B die kleinste abgeschlossene Obermenge von A ist.

2.) $B = \bigcap\limits_{C\in\mathcal{X}} C$, wobei $\mathcal{X} = \{C \subset M : A \subset C,\ C \text{ abgeschlossen}\}$

3.) $B = \{x \in M : \text{es gibt eine Folge } (x_n) \text{ in } A, \text{ die gegen } x \text{ konvergiert}\}$

Lösung: Zuerst kann man sich überlegen, dass es genau dann eine Folge in A gibt, die gegen ein $x \in M$ konvergiert, wenn keine der Mengen $B(x, \delta) \cap A$ leer ist. Sind die Mengen nämlich nicht-leer, so kann man zu $\delta = \frac{1}{n}$ Punkte $x_n \in A$ mit $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ finden, also $x_n \to x$. Gibt es umgekehrt eine Folge (x_n) in A, die gegen x konvergiert, so liegt sie für jedes $\delta > 0$ schließlich in $B(x, \delta) \cap A$.

„3.) $\Rightarrow$ 2.)“ Sei B wie in 3.). Ist $C \in \mathcal{X}$, so ist wegen Abgeschlossenheit auch $B \subset C$. Dies zeigt „$\subset$“. Ist aber $x \notin B$, so gibt es nach obigem Argument ein $\delta > 0$ mit $B(x, \delta) \cap A = \emptyset$. Dann ist $B(x, \delta)^C \in \mathcal{X}$ und daher $\bigcap_{C\in\mathcal{X}} C \subset B(x, \delta)^C$, insbesondere $x \notin \bigcap_{C\in\mathcal{X}} C$. Dies zeigt „$\supset$“.

„2.) $\Rightarrow$ 1.)“ Sei B wie in 2.). Weil $A \subset C$ für alle $C \in \mathcal{X}$ gilt, ist $A \subset B$. Weil jedes $C \in \mathcal{X}$ abgeschlossen ist, ist auch ihr Durchschnitt B abgeschlossen. Ist $C \subset M$ abgeschlossen mit $A \subset C$, so ist $C \in \mathcal{X}$, also nach Definition $B \subset C$.

„1.) $\Rightarrow$ 3.)“ Sei B wie in 1.). Ist $x \in M$ und gibt es eine Folge (x_n) in A, die gegen x konvergiert, so ist (x_n) eine Folge in B, die gegen x konvergiert, und wegen Abgeschlossenheit ist $x \in B$. Also gilt „$\supset$“. Sei nun umgekehrt $x \in M$ so, dass es keine Folge in A gibt, die gegen x konvergiert. Dann gibt es also ein $\delta_0 > 0$ mit $B(x, \delta_0) \cap A = \emptyset$. Folglich ist $A \subset B(x, \delta)^C$, und weil $B(x, \delta)^C$ abgeschlossen ist, folgt daraus $B \subset B(x, \delta)^C$. Insbesondere ist $x \notin B$, was „$\subset$“ zeigt.

Die eindeutig bestimmte Menge B, die obige drei Eigenschaften erfüllt, heißt *Abschluss von A* und wird mit $\overline{A}$ bezeichnet. Zeige zudem:

(a) A ist genau dann beschränkt, wenn $\overline{A}$ beschränkt ist. (1)

Lösung: Ist $\overline{A}$ beschränkt, so auch $A \subset \overline{A}$. Ist A beschränkt und $x_0 \in M$ beliebig, so gibt es $R > 0$ mit $A \subset B(x_0, R)$. Aus der Stetigkeit von d folgt aber, dass $d(x, x_0) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0)$ für jede Folge (x_n) in M gilt, die gegen x konvergiert, also nach Charakterisierung 3.) auch $d(x, x_0) \leq R$ für alle $x \in \overline{A}$. Dies zeigt $\overline{A} \subset B(x_0, R+1)$, also die Beschränktheit von $\overline{A}$.

(b) Die Menge A ist genau dann *relativ kompakt* (d.h.: $\overline{A}$ ist kompakt), wenn jede Folge in A eine (in M) konvergente Teilfolge besitzt. (2)

Lösung: Sei A relativ kompakt und (x_n) eine Folge in A. Dann ist (x_n) eine Folge in $\overline{A}$ und besitzt daher wegen Kompaktheit eine gegen $x \in \overline{A} \subset M$ konvergente Teilfolge.

Besitze nun umgekehrt jede Folge in A eine konvergente Teilfolge und sei (x_n) eine Folge in $\overline{A}$. Nach der ersten Überlegung des Beweises der Äquivalenz obiger Formulierungen gibt es eine Folge (y_n) in A mit $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Wähle eine konvergente Teilfolge (y_{n_k}) von (y_n) und bezeichne ihren Grenzwert mit $y \in M$. Weil $\overline{A}$ abgeschlossen ist, liegt y wieder in $\overline{A}$. Dann folgt aus

$$d(x_{n_k}, y) \leq d(x_{n_k}, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y) \leq \frac{1}{n_k} + d(y_{n_k}, y) \to 0, \quad (k \to \infty)$$

dass auch (x_{n_k}) gegen y konvergiert. Also besitzt jede Folge in $\overline{A}$ eine in $\overline{A}$ konvergente Teilfolge, was nach Vorlesung impliziert, dass $\overline{A}$ kompakt ist.