Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2008/09

Gesamt: 22 Punkte

Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 3

9. Sei $\alpha \in (0,1]$. Der Raum der *auf* $[0,1]$ *zum Exponent* α *hölderstetigen Funktionen* wird mit $\mathrm{C}^{0,\alpha}[0,1] := \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} : \|f\|_{0,\alpha} < \infty\}$ bezeichnet, wobei $\|f\|_{0,\alpha} := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$ die *Hölderkonstante von* f *zum Exponent* α ist. Zeige:

(a) $\mathrm{C}^{0,\alpha}[0,1]$ ist ein Vektorraum. (1)

Lösung: Natürlich ist $0 \in \mathrm{C}^{0,\alpha}[0,1]$. Seien $f, g \in \mathrm{C}^{0,\alpha}[0,1]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist offenbar $\|\lambda f\|_{0,\alpha} = |\lambda|\, \|f\|_{0,\alpha}$ und daher $\lambda f \in \mathrm{C}^{0,\alpha}$. Außerdem ist

$$\|f+g\|_{0,\alpha} \le \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha} \le \|f\|_{0,\alpha} + \|g\|_{0,\alpha} < \infty,$$

was $f + g \in \mathrm{C}^{0,\alpha}$ zeigt. Also ist $\mathrm{C}^{0,\alpha}$ ein Unterraum des Vektorraums aller reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$ und daher selbst ein Vektorraum.

(b) Eine Funktion $f \in \mathrm{C}^{0,\alpha}[0,1]$ ist genau dann konstant, wenn $\|f\|_{0,\alpha} = 0$ gilt. (1)

Lösung: Sei $\|f\|_{0,\alpha} = 0$, also $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} = 0$ für alle $x \neq y$. Damit ist $f(x) = f(y)$ für alle $x \neq y$. Dies bedeutet gerade, dass f konstant ist. Ist aber f konstant, so ist $\|f\|_{0,\alpha}$ offensichtlich erfüllt.

(c) Jede Funktion $f \in \mathrm{C}^{0,\alpha}[0,1]$ ist stetig auf $[0,1]$, also $\mathrm{C}^{0,\alpha}[0,1] \subset \mathrm{C}[0,1]$. (1)

Lösung: Nach Definition von $\mathrm{C}^{0,\alpha}[0,1]$ gilt $|f(x)-f(y)| \le \|f\|_{0,\alpha}\, |x-y|^\alpha$ für alle $x, y \in [0,1]$. Sei nun $\varepsilon > 0$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit f nicht konstant. Dann ist mit $|x-y| < \delta := \sqrt[\alpha]{\frac{\varepsilon}{\|f\|_{0,\alpha}}}$ auch

$$|f(x)-f(y)| \le \|f\|_{0,\alpha}\, |x-y|^\alpha < \|f\|_{0,\alpha} \frac{\varepsilon}{\|f\|_{0,\alpha}} = \varepsilon.$$

(d) Ist $f \in \mathrm{C}^{0,\alpha}[0,1]$, so ist $|f(x)| \le \|f\|_{0,\alpha} + |f(0)|$ für alle $x \in [0,1]$. (1)

Lösung: Wie in (c) sieht man $|f(x)-f(0)| \le \|f\|_{0,\alpha}\, |x|^\alpha$ für jedes $x \in [0,1]$. Daraus folgt

$$|f(x)| \le |f(x)-f(0)| + |f(0)| \le \|f\|_{0,\alpha}\, |x|^\alpha + |f(0)| \le \|f\|_{0,\alpha} + |f(0)|$$

wie behauptet.

(e) Die Menge $B_{0,\alpha} := \{f \in \mathrm{C}^{0,\alpha}[0,1] : |f(0)| + \|f\|_{0,\alpha} \le 1\}$ ist eine relativ kompakte Teilmenge von $\mathrm{C}[0,1]$. (1)

Lösung: Nach Aufgabenteil (d) gilt für jedes $f \in B_{0,\alpha}$ bereits die Abschätzung $|f(x)| \le |f(0)| + \|f\|_{0,\alpha} \le 1$, sodass die Menge $B_{0,\alpha}$ (punktweise) beschränkt ist. Aus dem Beweis zu (c) ergibt sich, dass $B_{0,\alpha}$ gleichgradig stetig ist: Zu $\varepsilon > 0$ kann man $\delta := \sqrt[\alpha]{\varepsilon}$ wählen, um die Bedingungen aus der gleichgradigen Stetigkeit zu prüfen.

(f) Ist $\alpha < \beta \in (0,1]$, so ist $\mathrm{C}^{0,\beta}[0,1] \subset \mathrm{C}^{0,\alpha}[0,1]$. (1)

Lösung: Wegen $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \le \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\beta}$ für alle $x \neq y$ ist $\|f\|_{0,\alpha} \le \|f\|_{0,\beta}$. Daher ist jede Funktion aus $\mathrm{C}^{0,\beta}[0,1]$ auch in $\mathrm{C}^{0,\alpha}[0,1]$.

(g) Sei (f_n) eine Folge in $\mathrm{C}^{0,\alpha}[0,1]$, für die $\|f_n\|_{0,\alpha}$ beschränkt ist und deren punktweiser Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für jedes $x \in [0,1]$ existiert. Dann ist $f \in \mathrm{C}^{0,\alpha}[0,1]$ und $\|f\|_{0,\alpha} \leq \limsup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{0,\alpha}$. (2)

Lösung: Sei $s := \limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_{0,\alpha}$ und $s' > s$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n\|_{0,\alpha} \leq s'$ für alle $n \geq n_0$. Für $x \neq y$ in $[0,1]$ ist daher $|f_n(x) - f_n(y)| \leq s'|x-y|^\alpha$, falls $n \geq n_0$. Betrachtet man (für feste x und y) den Grenzwert $n \to \infty$, ergibt sich $|f(x) - f(y)| \leq s'|x-y|^\alpha$ für $x \neq y$. Dies bedeutet $f \in \mathrm{C}^{0,\alpha}[0,1]$ und $\|f\|_{0,\alpha} \leq s'$. Weil diese Abschätzung für jedes $s' > s$ richtig ist, ergibt sich daraus $\|f\|_{0,\alpha} \leq s$ wie behauptet.

(h) Die Abbildung $f \mapsto |f(0)| + \|f\|_{0,\alpha}$ definiert eine Norm auf $\mathrm{C}^{0,\alpha}[0,1]$. (1)

Lösung: Die Homogenität und die Dreiecksungleichung sind für den ersten Summanden klar und wurden für den zweiten Summanden schon in (a) nachgewiesen. Zudem ist klar, dass die konstante Nullfunktion Norm 0 hat. Hat aber umgekehrt eine Funktion f Norm 0, so ist $f(0) = 0$, und f ist nach (b) konstant. Also ist $f = 0$.

(i) $\mathrm{C}^{0,\alpha}[0,1]$ ist bezüglich der Norm aus (h) ein Banachraum. (3)

Lösung: Sei (f_n) eine Cauchyfolge in $\mathrm{C}^{0,\alpha}[0,1]$. Die Abschätzung aus (d) zeigt dann

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{0,\alpha} + |f_n(0) - f_m(0)| \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

für jedes $x \in [0,1]$. Also ist $(f_n(x))$ für jedes $x \in [0,1]$ eine Cauchyfolge und daher konvergent gegen einen Grenzwert $f(x) \in \mathbb{R}$. Weil insbesondere aufgrund der Cauchyfolgeneigenschaft $\|f_n\|_{0,\alpha}$ beschränkt ist, folgt mit (g), dass f in $\mathrm{C}^{0,\alpha}[0,1]$ liegt. Es muss also nur noch gezeigt werden, dass f_n in der Norm von $\mathrm{C}^{0,\alpha}[0,1]$ gegen f konvergiert. Weil $f_n(0) \to f(0)$ bereits nach Definition richtig ist, muss nur $\|f_n - f\|_{0,\alpha} \to 0$ gezeigt werden. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wähle n_0 mit $\|f_n - f_m\|_{0,\alpha} \leq \varepsilon$ für $n, m \geq n_0$. Weil $f_n - f$ der punktweise Grenzwert von $(f_n - f_m)_{m\geq n_0}$ für $m \to \infty$ ist, folgt aus (g)

$$\|f_n - f\|_{0,\alpha} \leq \limsup_{m\geq n_0} \|f_n - f_m\|_{0,\alpha} \leq \varepsilon$$

für $n \geq n_0$. Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, zeigt dies $\|f_n - f\|_{0,\alpha} \to 0$ und damit wie oben beschrieben die Behauptung.

10. Zeige, dass es keine Norm $\|\cdot\|$ auf $C[0,1]$ gibt, welche die punktweise Konvergenz induziert, d.h. für welche folgende Aussagen für eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C[0,1]$ äquivalent sind: (3)

1.) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.

2.) $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\| = 0$.

Tipp: Betrachte hierzu beispielsweise eine Folge $\alpha_n e_n$, wobei $e_n(x) > 0$ genau dann, wenn $x \in (0, \frac{1}{n})$, mit geeigneten α_n.

Lösung: Definiere für $n \geq 2$

$$e_n(x) := \begin{cases} nx, & x \in [0, \frac{1}{n}), \\ 2 - nx, & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), \\ 0, & x \in [\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass alle e_n in $\mathrm{C}[0,1]$ liegen. Nehmen wir an, es gebe eine Norm mit der gewünschten Eigenschaft. Definiere $\alpha_n := \frac{1}{\|e_n\|} > 0$. Dann konvergiert $f_n := \alpha_n e_n$ punktweise gegen 0: Es ist $f_n(0) = 0$ für alle $n \geq 2$ und $f_n(x) = 0$ für alle $n \geq \frac{2}{x}$, wenn $x \in (0,1]$ ist. Also muss $\|f_n\| \to 0$ gelten im Widerspruch zu $\|f_n\| = \alpha_n \|e_n\| = 1$.

11. Seien $x, y \in c_0$. Wir sagen, dass $x \leq y$, falls $x_k \leq y_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Die Menge $[x, y] := \{a \in c_0 : x \leq a \leq y\}$ heißt *Ordnungsintervall in* c_0. Zeige, dass $[x, y]$ in c_0 kompakt ist! (3)

Lösung: Sei (a^n) eine Folge in $[x, y]$. Weil jede der Komponentenfolgen $(a^n_k)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist (genauer: $x_k \leq a^n_k \leq y_k$) gibt es nach dem Teilfolgenargument nach Übergang zu einer Teilfolge (die der Einfachheit halber wieder mit (a^n) bezeichnet wird) einen punktweisen Grenzwert $a = (a_k)$, d.h. $\lim_{n \to \infty} a^n_k = a_k$. Natürlich gilt dann auch $x_k \leq a_k \leq y_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Weil man (a_k) nach unten und nach oben durch eine Nullfolge abschätzen kann, liegt a wiederum in c_0 und genauer in $[x, y]$. Es muss nur noch gezeigt werden, dass (a^n) gegen a konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|y_k - x_k| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$. Wegen $x_k \leq a^n_k, a_k \leq y_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann auch $|a^n_k - a_k| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$. Für jedes $k < k_0$ gibt es aber nach Definition von a ein $n_0(k)$ mit $|a^n_k - a_k| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(k)$. Setzt man nun $n_0 := \max_{1 \leq k < k_0} n_0(k)$, so ergibt sich hieraus $\|a^n - a\|_\infty < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Dies zeigt, dass (a^n) wie behauptet gegen a konvergiert. Es besitzt also jede Folge in $[x, y]$ eine in $[x, y]$ konvergente Teilfolge. Das zeigt, dass $[x, y]$ kompakt ist.

12. Zeige die in der Vorlesung ausgelassene Richtung des Satzes von Arzela-Ascoli: Ist eine Teilmenge H von $\mathrm{C}(K)$ relativ kompakt, so ist H gleichstetig und punktweise beschränkt. (4)

Lösung: Weil $\overline{H}$ kompakt ist, ist $\overline{H}$ und daher auch H wie in Aufgaben 3 und 8 gesehen beschränkt. Es gibt also $M > 0$ mit $\|f\|_\infty \leq M$ für alle $f \in H$. Insbesondere gilt dann aber für jedes $x \in K$ ebenfalls $|f(x)| \leq M$, was zeigt, dass H auch punktweise beschränkt ist. Es muss noch gezeigt werden, dass H in jedem Punkt $x \in K$ gleichstetig ist. Seien dazu $x \in K$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Weil $\overline{H}$ kompakt ist, gibt es zur offenen Überdeckung $\overline{H} = \bigcup_{f \in \overline{H}} B(f, \frac{\varepsilon}{4})$ eine endliche Teilüberdeckung $B(f_i, \frac{\varepsilon}{4})$ mit endlich vielen $f_i \in \overline{H}$. Jedes dieser $f_i \in \mathrm{C}(K)$ ist stetig in x, und daher gibt es jeweils ein $\delta_i > 0$ mit $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle y mit $d(y, x) < \delta_i$. Definiere $\delta := \min \delta_i$. Ist nun $f \in H$, so gibt es ein f_i mit $\|f - f_i\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4}$. Daraus folgt

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_i(y)| + |f_i(y) - f_i(x)| + |f_i(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

für alle $y \in K$ mit $d(y, x) < \delta_i$, und daher insbesondere für alle $y \in K$ mit $d(y, x) < \delta$. Weil δ aber nicht von der Funktion $f \in H$ abhängt, zeigt dies die gleichgradige Stetigkeit von H.